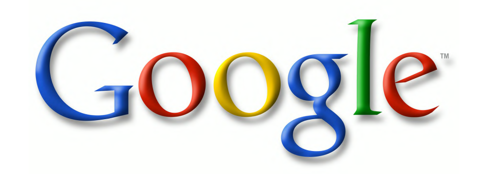


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

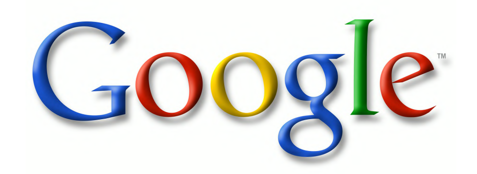
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

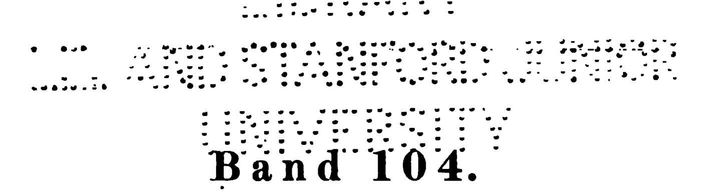
unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.



Band 104.

In vier Heften.

Berlin, 1889.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

116076

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

Inhaltsverzeichniss des Bandes 104.

Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

1.

Die algebraische Gleichung

$$(1.)\qquad s^n + A_1 s^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

in welcher die Coefficienten A ganze rationale Functionen von x sind, sei vorgelegt. Der Coefficient der höchsten Potenz in derselben ist gleich 1 gesetzt, da man andernfalls, wenn derselbe die ganze rationale Function A_0 ist, nach Multiplication mit A_0^{n-1}, $A_0 s = s'$ setzen kann, und dann auf den vorigen Fall zurückkommt. Das Gleichungspolynom in (1.) sei durch $F(\overset{n}{s}, x)$ oder $F(s)$ bezeichnet. Es soll $F(s)$ mit $\frac{\partial F}{\partial s}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Dann hat die Gleichung $F(s) = 0$ nach Ausschluss der Punkte x in endlicher Anzahl, für welche die Discriminante dieser Gleichung verschwindet, bei jedem anderen Punkte x im Endlichen n einfache Wurzeln. Bei einem solchen Punkte $x = a$ seien die n Werthe s durch b_1 bis b_n bezeichnet. Nun erhält man vermittelst der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{\partial F}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

in einem gewissen Kreise, dessen Mittelpunkt a ist, bekanntlich n convergente Potenzreihen s_1 bis s_n, die nach Potenzen von $x-a$ mit positiven ganzen Exponenten fortschreiten, für $x = a$ bezüglich in b_1 bis b_n übergehen und die Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ erfüllen.

Man kann diese Entwickelungen zunächst benutzen, um zu prüfen, ob das Gleichungspolynom in (1.) irreductibel ist, oder in rationale Factoren zerfällt, die ganze rationale Functionen von s sind und daher auch ganze rationale Functionen von x sein müssen.

Denn wenn ein solcher Factor existirt und gleich Null gesetzt eine Gleichung liefert, die für $x = a$ die Wurzeln b_1 bis b_r habe, so wird diese Gleichung durch die Entwickelungen s_1 bis s_r erfüllt, und das Gleichungspolynom derselben wird gleich dem Ausdrucke

$$(3.)\quad (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_r).$$

Das in s und x ganze rationale Gleichungspolynom kann nun keinen höheren Grad in $x-a$ haben, als der in F ist. Man kann daher in (3.) vermittelst der Entwickelungen von s_1 bis s_r die ganzen rationalen Coefficienten des Gleichungspolynoms bestimmen und nun zusehen, ob dasselbe mit dem Polynom $F(\overset{n}{s}, x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler hat. Ist nun $F(\overset{n}{s}, x)$ in die irreductibeln Factoren zerlegt, so sind diese zu behandeln. Es wird also jetzt von der Gleichung (1.) vorausgesetzt, dass dieselbe irreductibel sei.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) lässt sich in bekannter Weise eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten herleiten, welcher die algebraische Function s genügt. Die n Zweige von s seien s_1 bis s_n. Wird in $\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}$ die Grösse $s = s_1$ gesetzt, alsdann Zähler und Nenner des Ausdruckes mit $\frac{\partial F}{\partial s_2}\frac{\partial F}{\partial s_3}\cdots\frac{\partial F}{\partial s_n}$ multiplicirt, so erhält man unter Zuhülfenahme von Gleichung (1.)

$$(4.)\quad \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \frac{R(s,x)}{\Delta(x)},$$

wo R und Δ ganze rationale Functionen sind, R in Bezug auf s höchstens vom $(n-1)$ten Grade, Δ die Discriminante von F. (Vgl. *Serret,* Cours d'Algèbre supérieure, théorie des fonctions symétriques.) Aus (2.) und (4.) folgt dann mit Hinzunahme von (1.)

$$(5.)\quad \frac{ds}{dx} + H_1(s,x) = 0,$$

wo H_1 eine ganze rationale Function von s von einem Grade $\leqq n-1$ ist mit rationalen Coefficienten in x. Aus (5.) ergiebt sich auf dieselbe Weise

$$(6.)\quad \frac{d^2s}{dx^2} + H_2(s,x) = 0$$

u. s. w., es seien diese Gleichungen aufgestellt bis

$$(7.)\quad \frac{d^ns}{dx^n} + H_n(s,x) = 0$$

Das Gleichungssystem (5.) bis (7.) hat also diese Form:

$$
(8.)\quad \begin{cases}
\dfrac{ds}{dx} + a_{11}s + a_{12}s^2 + \cdots + a_{1,n-1}s^{n-1} + a_{1n} = 0, \\
\dfrac{d^2s}{dx^2} + a_{21}s + a_{22}s^2 + \cdots + a_{2,n-1}s^{n-1} + a_{2n} = 0, \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\dfrac{d^ns}{dx^n} + a_{n1}s + a_{n2}s^2 + \cdots + a_{n,n-1}s^{n-1} + a_{nn} = 0.
\end{cases}
$$

worin die a rationale Functionen von x sind. Aus demselben ergiebt sich

$$
(9.)\quad \begin{vmatrix}
\dfrac{ds}{dx} + a_{11}s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\dfrac{d^2s}{dx^2} + a_{21}s & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & & \vdots \\
\dfrac{d^ns}{dx^n} + a_{n1}s & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Wenn die Grössen a_{12} bis a_{1n} Null sind, so besteht die Differentialgleichung $\frac{ds}{dx} + a_{11}s = 0$. Wenn aber nicht alle Grössen a_{12} bis a_{1n} Null sind, so ist falls die Determinante $\Sigma \pm a_{12}a_{23}\dots a_{n,n-1}$ nicht identisch Null ist, durch (9.) eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung gegeben. Ist aber diese Determinante gleich Null, so kann man aus Unterdeterminanten derselben $n-1$ Multiplicatoren λ_1 bis λ_{n-1} bilden, die nicht alle verschwinden, so dass sich aus den $n-1$ ersten Gleichungen (8.) alsdann

$$
(10.)\quad \lambda_1\left(\frac{ds}{dx} + a_{11}s\right) + \lambda_2\left(\frac{d^2s}{dx^2} + a_{21}s\right) + \cdots + \lambda_{n-1}\left(\frac{d^{n-1}s}{dx^{n-1}} + a_{n-1,1}s\right) = 0
$$

ergiebt. Also in allen Fällen kann man auf die angegebene Weise eine homogene lineare Differentialgleichung σter Ordnung, wo $\sigma \leqq n$ ist, $\varphi_0(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herstellen, welcher die algebraische Function s genügt.

Aus dieser Differentialgleichung soll nun diejenige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, welcher die Function s genügt, hergeleitet werden, deren Ordnung gleich der Anzahl der linearunabhängigen Zweige von s ist.

Die Differentialgleichung von dieser Beschaffenheit wird alsdann zur Untersuchung der Function s, zur vollständigen Darstellung der Zweige von s bei den Punkten, in welchen mehrfache Wurzeln der Gleichung vorkommen, und zur Bestimmung des Resultates der Fortsetzung der Zweige verwandt.

Dass diese Differentialgleichung überhaupt existirt, ergiebt sich aus einem Satze des Herrn ***Frobenius*** Bd. 76 dieses Journals p. 240, und ist auch dort ausgesprochen, jedoch bedarf dieser Satz einer Modification, eventuell der Beweis desselben einer Ergänzung. Eine analytische Function y, die sich als solche allenthalben fortsetzen lässt, indem dieselbe, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten a in jedem Kreise, der keinen dieser Punkte enthält, einwerthig und stetig bleibt, soll ϱ linearunabhängige Zweige besitzen. Dieselben werden in die Gleichung

$$(11.)\qquad \frac{d^\varrho y}{dx^\varrho}+p_1\frac{d^{\varrho-1}y}{dx^{\varrho-1}}+\cdots+p_\varrho y = 0$$

eingesetzt, dann erhält man durch Auflösung des Systems der ϱ in Bezug auf die Coefficienten p linearen Gleichungen jede dieser Grössen p durch einen Quotienten von zwei Determinanten ausgedrückt. Bei dem Umgange um einen Punkt a ändern sich Zähler und Nenner dieses Quotienten um einen und denselben constanten Factor, die Determinante der Substitutionsconstanten; die p bleiben also einwerthig und sind in einem Bereiche, aus welchem Gebiete, die Punkte a enthalten, ausgeschlossen sind, einwerthige Functionen, die nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und in diesen nur in endlicher Ordnung unendlich werden. Bei einem Punkte a haben die Determinanten in Zähler und Nenner die allgemeine Entwickelungsform

$$(x-a)^r\psi(x),\qquad \psi(x) = \sum_0^\infty c_\lambda(x-a)^\lambda+\sum_{-1}^{-\infty}c_\lambda(x-a)^\lambda;$$

bei $x=\infty$ tritt $\frac{1}{x}$ statt $x-a$ ein. Es ist also noch die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass der Nenner in dem Ausdruck der einwerthigen Function p in der Nähe von $x=a$ in unendlich vielen Punkten verschwinden könnte. Sobald nun von den ϱ linearunabhängigen Zweigen von y ***und zugleich*** von ihren Ableitungen bis zur ϱten Ordnung vorausgesetzt wird, dass sie mit einer endlichen Potenz von $x-a$ bezüglich $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x=a$ bezüglich $x=\infty$ endlich bleiben, wird $\psi(x)$ nur in endlicher Ordnung unendlich und daher auch p. Die Coefficienten p sind alsdann rationale Functionen. Die Integrale der Differentialgleichung (11.) sind reguläre. (Vgl. hierbei die Abhandlungen des Verf. Bd. 74 p. 194, Bd. 75 Nr. 1 und 8.)

In dem hier vorliegenden Falle ist diese Bedingung erfüllt, da die Zweige von s bei den Punkten, in denen gleiche Wurzeln vorkommen, und bei $x=\infty$ Entwickelungen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von

$x-a$ bezüglich $\frac{1}{x}$ haben, die negative Exponenten nur in endlicher Anzahl enthalten.

Es besteht also eine homogene lineare Differentialgleichung $f_\varrho(s,x) = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, welcher die algebraische Function s aus der irreductibeln Gleichung (1.) $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ genügt, und deren Ordnung ϱ mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige von s übereinstimmt. Es kann nur *eine* solche Differentialgleichung geben. Der Differentialausdruck derselben braucht nicht unzerlegbar zu sein. Denn ist z. B. $s = g(x) \pm \sqrt{h(x)}$, wo $g(x)$ und $h(x)$ ganze rationale Functionen von x höheren als nullten Grades sind, $h(x)$ kein Quadrat, so erfüllt s eine irreductible Gleichung (1.), worin $n = 2$ und die beiden Zweige von s, $g(x) + \sqrt{h(x)}$ und $g(x) - \sqrt{h(x)}$, sind linearunabhängig. Die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ ist daher von zweiter Ordnung, enthält aber die Integrale von

$$\frac{ds}{dx} - \frac{d\log g(x)}{dx} s = 0 \quad \text{und von} \quad \frac{ds}{dx} - \frac{d\log \sqrt{h(x)}}{dx} s = 0.$$

2.

Es soll nun zunächst die Beschaffenheit der Integrale der in der vorigen Nummer definirten Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ näher untersucht werden.

Wesentlich singuläre Punkte von $f_\varrho = 0$, also solche, bei denen nicht alle Integrale einwerthig und stetig bleiben, können nur in den Stellen auftreten, in denen die Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat und bei $x = \infty$. Was zunächst den Punkt $x = \infty$ angeht, so ist bei demselben $x = t^{-1}$ in $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ und $f_\varrho(s, x) = 0$ einzusetzen. Wenn in $F(\overset{n}{s}, x)$ die höchste Potenz von x die $m$te ist, so wird $F(\overset{n}{s}, t^{-1})$ mit t^{mn} multiplicirt und $st^m = u$ in $F(\overset{n}{s}, t^{-1})$ und $f_\varrho(s, t^{-1})$ gesetzt. Alsdann kommt die Untersuchung von u bei $t = 0$ auf dieselbe Untersuchung, wie die von s bei einem Punkte x im Endlichen, hinaus.

Bei einem Punkte $x = a$ im Endlichen, in dem $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, besitzt s für die in einem μ-blättrigen Windungspunkte ($\mu \geqq 2$), falls ein solcher vorkommt, zusammenhängenden μ Zweige bekanntlich eine Entwickelung der Form $\zeta^l \sum_0^\infty c_\lambda \zeta^\lambda$, $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{\mu}}$, l eine ganze Zahl $\geqq 0$, für

einen in der Umgebung von $x = a$ einwerthigen Zweig eine Entwickelung der Form $(x-a)^k \sum\limits_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$, k eine ganze Zahl > 0. Die ϱ linearunabhängigen Zweige von s, welche ein System von ϱ linearunabhängigen Integralen von $f_\varrho = 0$ sind, haben also Entwickelungen der angegebenen Form. Nun zerfällt die Entwickelung $\zeta^l \sum\limits_0^\infty c_\lambda \zeta^\lambda$, $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{n}}$ in eine Summe von Reihen der Form $(x-a)^{\frac{\sigma}{\mu}} \sum\limits_0^\infty k_\lambda (x-a)^\lambda$, worin die Exponenten $\frac{\sigma}{\mu}$ in je zwei Reihen sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Jede dieser Reihen convergirt wegen der unbedingten Convergenz von $\sum\limits_0^\infty c_\lambda \zeta^\lambda$ für sich und befriedigt die Differentialgleichung $f_\varrho = 0$. Die ϱ linearunabhängigen Zweige von s, welche $f_\varrho = 0$ erfüllen, setzen sich also linear mit constanten Coefficienten aus Integralen von $f_\varrho = 0$ der Form $(x-a)^r \sum\limits_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$ zusammen, in denen die r positive rationale Zahlen sind, welche, auf die kleinste Benennung gebracht, einen Nenner $\leqq n$ haben. Es muss also unter diesen letzteren Integralen selbst ein System von ϱ linearunabhängigen sich finden. Nun sei ein zweites System von ϱ linearunabhängigen Integralen von $f_\varrho = 0$ aufgestellt, die bezüglich zu den Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = a$ gehören. Ein Integral des einen Systems ist durch diejenigen des anderen, deren Exponenten sich von dem Exponenten jenes Integrales nur um ganze Zahlen unterscheiden, linear mit constanten Coefficienten ausdrückbar. Es kommen demnach in dem zweiten Systeme keine Logarithmen vor, die Wurzeln der Exponentengleichung müssen daher von einander verschieden sein und müssen positive rationale Zahlen sein, welche in der kleinsten Benennung Nenner $\leqq n$ haben.

Das Entsprechende gilt bei irgend einem anderen Punkte $x = a$ im Endlichen. Bei einem solchen können die Wurzeln der Exponentengleichung nur von einander verschiedene positive ganze Zahlen sein.

Also hat $f_\varrho = 0$ bei irgend einem Punkte $x = a$ im Endlichen ein System von ϱ linearunabhängigen Integralen der Form

$$(1.) \quad (x-a)^{r_1}\psi_1(x-a), \quad (x-a)^{r_2}\psi_2(x-a), \quad \ldots \quad (x-a)^{r_\varrho}\psi_\varrho(x-a),$$

worin die ψ Entwickelungen der Form $\sum\limits_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$, Mod. $c_0 > 0$, haben, die Exponenten r von einander verschiedene rationale Zahlen > 0 sind, welche in der kleinsten Benennung Nenner $\leqq n$ haben, und wo diese Exponenten r die ϱ Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = a$ bilden.

Bei $x = \infty$ hat $f_\varrho = 0$ nach dem Vorhergehenden ein System von ϱ linearunabhängigen Integralen der Form

$$(2^a.)\quad s = t^{-m}u, \quad t = x^{-1},$$

$$(2^b.)\quad u = t^{r_1}\chi_1(t), \quad t^{r_2}\chi_2(t), \quad \ldots \quad t^{r_\varrho}\chi_\varrho(t),$$

worin die χ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_\alpha t^\alpha$, Mod. $c_0 \gtrless 0$, haben, die Exponenten r von einander verschiedene rationale Zahlen $\gtrless 0$ mit den Nennern in der kleinsten Benennung $\leqq n$ sind, und wo die Zahlen r_1-m, r_2-m bis $r_\varrho-m$ die ϱ Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ bei $x = \infty$ bilden.

3.

Die Ordnung ϱ der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ wird in folgender Weise bestimmt. Ein nichtsingulärer Punkt $x = a$ der Differentialgleichung $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ (Nr. 1) sei gewählt, in welchem die Wurzeln von $\overset{n}{F}(s, x) = 0$ von einander verschieden seien. Bei diesem nichtsingulären Punkte sei ein System von σ linearunabhängigen Integralen von $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ angenommen y_1, y_2 bis y_σ, so dass

$$y_\alpha, \quad \frac{dy_\alpha}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{d^{\alpha-2}y_\alpha}{dx^{\alpha-2}}, \quad \frac{d^\alpha y_\alpha}{dx^\alpha}, \quad \ldots \quad \frac{d^{\sigma-1}y_\alpha}{dx^{\sigma-1}} \qquad (\alpha = 1, \ldots \sigma)$$

für $x = a$ verschwindet, $\left(\frac{d^{\alpha-1}y_\alpha}{dx^{\alpha-1}}\right)_{x=a} = (\alpha-1)!$ ist. Nun seien die n bei diesem Punkte $x = a$ einwerthigen Zweige von s, s_λ $(\lambda = 1, \ldots n)$ entwickelt (aus Gl. Nr. 1 (5.)) bis zur Potenz $(x-a)^{\sigma-1}$. Es sei

$$(1.)\quad s_\lambda = c_1^{(\lambda)} + c_2^{(\lambda)}(x-a) + c_3^{(\lambda)}(x-a)^2 + \cdots + c_\sigma^{(\lambda)}(x-a)^{\sigma-1} + \cdots.$$

Dann ergiebt sich

$$(2.)\quad \begin{cases} s_1 = c_1^{(1)}y_1 + c_2^{(1)}y_2 + \cdots + c_\sigma^{(1)}y_\sigma, \\ s_2 = c_1^{(2)}y_1 + c_2^{(2)}y_2 + \cdots + c_\sigma^{(2)}y_\sigma, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ s_n = c_1^{(n)}y_1 + c_2^{(n)}y_2 + \cdots + c_\sigma^{(n)}y_\sigma. \end{cases}$$

Um nun aus diesem Gleichungssysteme zu ermitteln, welche der Zweige s_1 bis s_n linearunabhängig sind, wird aus einer der Gleichungen, etwa der $\alpha_1$ten, eine der Grössen y, deren Coefficient von Null verschieden ist, etwa y_μ, durch s_{α_1} und die übrigen y ausgedrückt. Dann sind s_{α_1} und die übrigen y linearunabhängig. Der Ausdruck von y_μ wird in die anderen $n-1$ Gleichungen eingesetzt. Nun wird aus einer der erhaltenen $n-1$ Gleichungen,

etwa der $\alpha_2$ten, ein y mit nichtverschwindendem Coefficienten, etwa y_ν, durch s_{α_2} und die übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen ausgedrückt. Alsdann sind s_{α_1}, s_{α_2} und die y, aus welchen y_μ und y_ν ausgeschieden sind, linearunabhängig. Der Ausdruck für y_ν wird in die übrigen $n-2$ Gleichungen eingesetzt. Und dasselbe Verfahren wird fortgesetzt, bis kein y mehr in den übrig bleibenden Gleichungen vorkommt. Die Grössen s_{α_1}, s_{α_2} etc., vermittelst welcher successive ein y ersetzt worden ist, bilden ein System linearunabhängiger Zweige.

Die Anzahl derselben bestimmt also die Ordnung ϱ der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$.

Ergiebt sich $\varrho = \sigma$, so ist $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ selbst die gesuchte Differentialgleichung.

Ist aber $\varrho < \sigma$, so ist aus $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ herzuleiten. Das zu dem Zwecke einzuschlagende Verfahren, welches in der folgenden Nummer auseinandergesetzt wird, erfordert, dass die Coefficienten der Differentialgleichung $f_\varrho = 0$ bei einem Punkte entwickelt werden. Diese Entwickelung kann man hier vollständig bestimmt bei dem oben genannten Punkte a vornehmen, vermöge der vorhin ermittelten ϱ linearunabhängigen Entwickelungen von s_{α_1}, s_{α_2} bis s_{α_ϱ}, die ein System linearunabhängiger Integrale von $f_\varrho = 0$ bilden. Die Determinante dieser linearunabhängigen Integrale $\Sigma \pm s_{\alpha_1} \frac{ds_{\alpha_2}}{dx} \cdots \frac{d^{\varrho-1}s_{\alpha_\varrho}}{dx^{\varrho-1}}$ ist, abgesehen von isolirten Punkten, von Null verschieden. Da die Integrale von $f_\varrho = 0$ bei $x = a$ einwerthig und stetig sind, so kann $x = a$ für $f_\varrho = 0$ nur ein nichtsingulärer oder ein ausserwesentlich singulärer Punkt sein. In ersterem Falle ist die Determinante in $x = a$ von Null verschieden. Um in letzterem Falle das Verhalten der Determinante in $x = a$ zu bestimmen, ist zu beachten, dass der Punkt $x = a$ in $\varphi_\sigma = 0$ ein nichtsingulärer Punkt war, die Wurzeln der Exponentengleichung von $\varphi_\sigma = 0$ sind daher $0, 1, \ldots \sigma-1$. In dem ausserwesentlich singulären Punkte a in $f_\varrho = 0$ hat die Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ Wurzeln, die von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, welche nicht die Reihe $0, 1, \ldots \varrho-1$ bilden. Zu jeder solchen Wurzel r gehört ein Integral der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, Mod. $c_0 \gtrless 0$, welches auch $\varphi_\sigma = 0$ befriedigt, also ist r eine Zahl der Reihe $0, 1, \ldots \sigma-1$. Aus dieser Reihe gehen also die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ bei $x = a$ hervor, dieselben seien r_1, r_2 bis r_ϱ. $f_\varrho = 0$ sei die Differential-

gleichung

$$(3.)\quad \frac{d^\varrho s}{dx^\varrho}+p_1\frac{d^{\varrho-1}s}{dx^{\varrho-1}}+\cdots+p_\varrho s = 0.$$

Aus der Exponentengleichung

$$(4.)\quad r(r-1)\ldots(r-\varrho+1)+(p_1(x-a))_{x=a}r(r-1)\ldots(r-\varrho+2)+\cdots+(p_\varrho(x-a)^\varrho)_{x=a} = 0$$

ergiebt sich

$$(5.)\quad (p_1(x-a))_{x=a} = \frac{\varrho(\varrho-1)}{2}-(r_1+r_2+\cdots+r_\varrho).$$

Daher ist bei dem ausserwesentlich singulären Punkte $x=a$ der niedrigste Werth, dessen die ganzzahlige Grösse $(p_1(x-a))_{x=a}$ fähig ist, $-\varrho(\sigma-\varrho)$. Und alsdann ergiebt der Ausdruck der Determinante

$$(6.)\quad ce^{-\int p_1 dx},$$

dass die Entwickelung derselben mit keinem höheren Gliede als $(x-a)^{\varrho(\sigma-\varrho)}$ beginnen kann. Werden nun in (3.) die Entwickelungen s_{a_1} bis s_{a_ϱ} eingesetzt, und wird das Gleichungssystem in Bezug auf die p aufgelöst, so kann man also in der Entwickelung von $p_\mathfrak{b}$, welche die Form $(x-a)^{-\mathfrak{b}}\sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ hat, so viel Coefficienten, als verlangt werden, eindeutig bestimmen.

Was die Ausdrücke der Coefficienten $k_\mathfrak{a}$ in der Entwickelung von $p_\mathfrak{b}$ angeht, so ist zu beachten, dass die Determinanten in Zähler und Nenner des Quotienten, welcher $p_\mathfrak{b}$ darstellt, alternirende Functionen der ϱ Zweige s_{a_1}, s_{a_2} bis s_{a_ϱ} sind, und dass die Coefficienten von $(x-a)^\mathfrak{a}$ in der Entwickelung (1.) der Zweige s gemäss Nr. 1 (5.), (6.) etc. die Form

$$(7.)\quad q_{0\mathfrak{a}}+q_{1\mathfrak{a}}c_1^{(\lambda)}+q_{2\mathfrak{a}}(c_1^{(\lambda)})^2+\cdots+q_{n-1,\mathfrak{a}}(c_1^{(\lambda)})^{n-1}$$

haben, wo die von λ unabhängigen Grössen q rationale Ausdrücke von a und den Constanten der Gleichung $\overset{n}{F}(s,x)=0$ sind. Daher werden die Coefficienten der Potenzen von $x-a$ in den Entwickelungen von Zähler und Nenner der Grösse $p_\mathfrak{b}$ alternirende ganze rationale Functionen der Werthe $c_1^{(\lambda)}$ $(\lambda=1,\ldots\varrho)$. Die Coefficienten $k_\mathfrak{a}$ in der Entwickelung von $p_\mathfrak{b}$ sind daher symmetrisch in Bezug auf diese $c_1^{(\lambda)}$ unter der Form von Quotienten alternirender oder symmetrischer ganzer rationaler Functionen der $c_1^{(\lambda)}$ $(\lambda=1,\ldots\varrho)$.

4.

Wenn die in der vorigen Nummer bestimmte Ordnung ϱ der Differentialgleichung $f_\varrho(s,x)=0$ sich als kleiner als die Ordnung σ der Diffe-

rentialgleichung $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ der Nr. 1 ergeben hat, so ist nun aus letzterer Differentialgleichung die erstere herzuleiten.

Zu dem Zwecke ist zu bemerken, dass die Integrale von $f_\varrho = 0$ die Differentialgleichung $\varphi_\sigma = 0$ erfüllen und dass $f_\varrho(s, x)$ ein regulärer Differentialausdruck ist. Hieraus folgt, dass $\varphi_\sigma(y, x)$ sich unter der Form darstellen lässt

$$(1.)\qquad g_\varrho(y, x) = y_1, \quad h_{\sigma-\varrho}(y_1, x),$$

wo $g_\varrho(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck ϱter Ordnung ist und $h_{\sigma-\varrho}(y_1, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck $(\sigma-\varrho)$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1. Ein solcher Ausdruck $g_\varrho(y, x)$ ist $f_\varrho(y, x)$. (Vgl. die Abh. des Verf. Bd. 96 dieses Journals Nr. 2 I.) Demnach ist auf den Differentialausdruck $\varphi_\sigma(y, x)$ das Verfahren anzuwenden, um die Zerlegungen der Beschaffenheit (1.) aufzusuchen. Dieses Verfahren ist in der Abh. des Verf. Bd. 96 dieses Journals Nr. 6 angegeben. Aus demselben ergiebt sich, dass nur eine endliche Anzahl dieser Zerlegungen mit den hier in Betracht kommenden Beziehungen auftritt; dieses folgt nämlich daraus, dass die Operationen, die auf den Ausdruck τ (2.) der hier vorliegenden Nummer führen, nur in endlicher Anzahl möglich sind, und dass man für die Coefficienten p der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ nach der vorigen Nummer eine eindeutig bestimmte Entwickelung angeben kann.

Es sind nur diejenigen Zerlegungen (1.) aufzustellen, bei denen die Integrale von $g_\varrho(y, x) = 0$ die in Nr. 2 ermittelte Beschaffenheit der Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ haben.

Ein singulärer Punkt von $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ sei einer der Punkte, in welchem die Discriminante von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ verschwindet. Bei diesem Punkte und bei $x = \infty$ sind aus den Wurzeln der Exponentengleichung von $\varphi_\sigma = 0$ als Wurzeln der Exponentengleichung von $g_\varrho = 0$ nur rationale Zahlen der in Nr. 2 (1.), (2.) angegebenen Beschaffenheit herauszunehmen. Jeder andere singuläre Punkt von $\varphi_\sigma = 0$ im Endlichen ist für $f_\varrho = 0$ ausserwesentlich singulär oder nicht-singulär. Aus den Wurzeln der Exponentengleichung von $\varphi_\sigma = 0$ bei diesem Punkte sind als Wurzeln der Exponentengleichung von $g_\varrho = 0$ nur von einander verschiedene ganze Zahlen $\geqq 0$ zu entnehmen.

Nun ist für das Bestehen von (1.) zunächst nothwendig, dass die in Abh. Bd. 96. Nr. 6 (11.) bezeichnete Zahl τ eine ganze Zahl gleich oder

grösser als Null ist. Diese Zahl τ ist folgende. Wenn $\varphi_o(y, x) = 0$ im Endlichen $\varkappa$ singuläre Punkte a_1 bis $a_\varkappa$ hat (bei $n \geqq 2$ ist $\varkappa \geqq 1$), und die Summe der Wurzeln der Exponentengleichung von $g_\varrho(y, x) = 0$ bei dem Punkte $a_\mathfrak{c}$ durch $R_{x=a_\mathfrak{c}}$, bei $x = \infty$ durch $R_{x=\infty}$ bezeichnet wird, so ist

$$(2.)\qquad \tau = (\varkappa - 1)\frac{\varrho(\varrho-1)}{2} - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\varkappa} R_{x=a_\mathfrak{c}} - R_{x=\infty}.$$

Ergiebt sich, dass τ ganzzahlig und $\geqq 0$ wird, so ist nun weiter das l. c. auseinandergesetzte Verfahren anzuwenden. Die dabei nothwendige Entwickelung der Coefficienten p der Differentialgleichung $f_\varrho = 0$ wird nach der vorigen Nummer eindeutig bestimmt gegeben. Diese Entwickelung vertritt die in Bd. 96 Nr. 6 I. bei dem singulären Punkte A angenommene, so dass sich für den hier vorliegenden Fall das bezügliche Verfahren ohne irgend welche Ausnahme durchführen lässt. Falls sich gemäss Bd. 96 Nr. 6 II. ergiebt, dass bei einem singulären Punkt A von $\varphi_o = 0$ oder bei $x = \infty$ gleichfalls die Entwickelung der Coefficienten von $g_\varrho = 0$ eindeutig ausfällt, so kann man auch diese Entwickelung anwenden. Auf diese Weise ist es möglich, die in endlicher Anzahl vorhandenen regulären Differentialausdrücke $g_\varrho(y, x)$ von der oben angegebenen Beschaffenheit herzustellen. Unter denselben muss sich der Differentialausdruck $f_\varrho(s, x)$ befinden.

Was die Constanten in diesen Ausdrücken $g_\varrho(y, x)$ angeht, so ist zu bemerken, da als Wurzeln der Exponentengleichungen von $g_\varrho(y, x) = 0$ nur rationale Zahlen anzunehmen waren, so sind die Constanten in g_ϱ rationale Ausdrücke der singulären Punkte von $\varphi_o = 0$ und von Constanten in den Entwickelungen der Coefficienten $p_\mathfrak{b}$, die in Nr. 3 angegeben sind. Ist die Entwickelung der Coefficienten der Differentialquotienten in $g_\varrho = 0$ bei einem singulären Punkte von $\varphi_o = 0$ oder $x = \infty$ angenommen, so ersieht man, dass die Constanten rationale Ausdrücke der singulären Punkte und Constanten in $\varphi_o = 0$ werden.

Ob nun eine der Differentialgleichungen $g_\varrho(y, x) = 0$ durch die algebraische Function $s = y$ aus $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ erfüllt wird, ist auf folgende Weise zu erkennen. Es werden in $g_\varrho(s, x)$ für die Differentialquotienten die Ausdrücke Nr. 1 (8.) eingesetzt, wodurch ein Polynom

$$(3.)\qquad A_0 + A_1 s + \cdots + A_{n-1} s^{n-1}$$

hervorgeht, dessen Coefficienten A rationale Functionen von x sind, so ist, wenn dasselbe für s aus $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ verschwinden soll, wegen der Irre-

ductibilität von F nothwendig und hinreichend, dass die rationalen Functionen A_0 bis A_{n-1} von x verschwinden.

Es ist also, sobald man einen Differentialausdruck $g_\varrho(y, x)$ ermittelt hat, zu prüfen, ob die angegebene Bedingung erfüllt ist. Bei einem dieser Differentialausdrücke muss dieses stattfinden, und dieser ist der Differentialausdruck $f_\varrho(s, x)$.

5.

Nachdem die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$, welcher die ϱ linearunabhängigen Zweige von s aus $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ genügen, ermittelt ist, werde dieselbe benutzt, um die Zweige von s bei einem Punkte $x = a$, in welchem die Discriminante von F verschwindet, zu untersuchen.

Die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ bei $x = a$ seien aufgestellt. Dieselben sind von einander verschiedene rationale Zahlen $\geqq 0$, zu welchen ein System linearunabhängiger Integrale von der in Nr. 2 (1.) angegebenen Beschaffenheit gehört. Die ϱ linearunabhängigen Zweige von s bilden andererseits ein System linearunabhängiger Integrale von $f_\varrho = 0$, die Integrale des einen Systems werden durch die des anderen linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt. Daraus folgt zunächst:

I. *Enthält die Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ bei $x = a$ nur ganzzahlige Wurzeln, so sind die n Zweige von s aus $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ in der Umgebung von $x = a$ einwerthig und umgekehrt.*

II. Wenn in a ein μ-blättriger Windungspunkt ($\mu \geqq 2$) vorkommt, so haben die μ in diesem Punkte zusammenhängenden Zweige eine Entwickelung der Form

$$(1.)\quad \zeta^l \sum_0^\infty c_\lambda \zeta^\lambda, \quad \zeta = (x-a)^{\frac{1}{\mu}},$$

l eine ganze Zahl $\geqq 0$. Dieselbe ist gleich

$$(2.)\quad (x-a)^{\frac{\sigma_1}{\mu}} \psi_1(x-a) + (x-a)^{\frac{\sigma_2}{\mu}} \psi_2(x-a) + \cdots + (x-a)^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}} \psi_\delta(x-a),$$

wo die ψ von der Form $\sum_0^\infty k_\lambda (x-a)^\lambda$, Mod. $k_0 \gtrless 0$, sind, je zwei Exponenten $\frac{\sigma_1}{\mu}$ bis $\frac{\sigma_\delta}{\mu}$ sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Die Grössen $(x-a)^{\frac{\sigma_1}{\mu}} \psi_1(x-a)$ bis $(x-a)^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}} \psi_\delta(x-a)$ sind linearunabhängige Integrale von $f_\varrho = 0$. Aus einem der μ Zweige ergeben sich die $\mu-1$ anderen durch

successiven Umgang um $x = a$ und erhalten die Darstellung

$$
(3.)\quad \begin{cases}
\omega_1(x-a)^{\frac{\sigma_1}{\mu}}\psi_1 + \omega_2(x-a)^{\frac{\sigma_2}{\mu}}\psi_2 + \cdots + \omega_\delta(x-a)^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}}\psi_\delta, \\
\omega_1^2(x-a)^{\frac{\sigma_1}{\mu}}\psi_1 + \omega_2^2(x-a)^{\frac{\sigma_2}{\mu}}\psi_2 + \cdots + \omega_\delta^2(x-a)^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}}\psi_\delta, \\
\vdots \\
\omega_1^{\mu-1}(x-a)^{\frac{\sigma_1}{\mu}}\psi_1 + \omega_2^{\mu-1}(x-a)^{\frac{\sigma_2}{\mu}}\psi_2 + \cdots + \omega_\delta^{\mu-1}(x-a)^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}}\psi_\delta,
\end{cases}
$$

wo die Constanten $\omega_1 = e^{\frac{\sigma_1}{\mu}2\pi i}$ bis $\omega_\delta = e^{\frac{\sigma_\delta}{\mu}2\pi i}$ sind.

Nun sei zuerst vorausgesetzt, es habe sich aus dem Systeme Nr. 3 (2.) *ergeben, dass die Anzahl ϱ der linearunabhängigen Zweige von s mit der Anzahl n der Zweige zusammenfällt. In diesem Falle muss die Ordnung σ der Differentialgleichung $\varphi_\sigma(y, x) = 0$ aus Nr. 1 gleich n sein, und die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ ist $\varphi_\sigma(y, x) = 0$.*

Dann sind die μ in einem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden Zweige linearunabhängig. Aus der Darstellung (2.), (3.) dieser μ linearunabhängigen Zweige folgt, dass $\delta = \mu$ ist, und es gehen also aus dieser Darstellung μ Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$, $\varrho = n$ der Form

$$(x-a)^{\frac{\sigma_b}{\mu}} \sum_0^\infty k_{\lambda b}(x-a)^\lambda, \quad \text{Mod. } k_{0b} \gtrless 0, \qquad (b = 1, \ldots \mu),$$

σ_b ganzzahlig ≥ 0 hervor, worin je zwei Exponenten $\frac{\sigma_b}{\mu}$ sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Diese μ Integrale sind durch die μ Zweige linear mit constanten Coefficienten darstellbar.

Wenn ein zweiter ν-blättriger Windungspunkt in a vorhanden ist, wo ν auch gleich μ sein kann, so gehen aus den ν Zweigen, die in demselben zusammenhängen, ν Integrale von $f_\varrho = 0$, $\varrho = n$ von gleicher Beschaffenheit, wie die vorigen, hervor. Diese Integrale sind von den vorhergehenden linearunabhängig. Denn da die ν neuen Zweige von den vorigen μ Zweigen linearunabhängig sind, so kann, wenn eine lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der vorhergehenden μ Integrale durch die bezüglichen μ Zweige ausgedrückt ist und ebenso eine lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der hinzugetretenen ν Integrale durch die bezüglichen ν Zweige dargestellt ist, die Summe dieser Verbindungen nicht verschwinden. Ist der Exponent eines der ν letzteren Integrale dem Exponenten eines der μ vorhergehenden Integrale gleich, so kann man das Integral, welches unter jenen ν Integralen vorkommt, durch eine lineare

Verbindung beider Integrale mit constanten Coefficienten ersetzen, in welcher der Exponent des Integrales sich von dem Exponenten des zu ersetzenden Integrales um eine von Null verschiedene positive ganze Zahl unterscheidet. Die auf diese Weise erhaltenen gesammten $\mu+\nu$ linearunabhängigen Integrale sind durch die $\mu+\nu$ Zweige linear mit constanten Coefficienten darstellbar. Das Entsprechende tritt ein, wenn statt der Zweige in einem zweiten Windungspunkt ein bei $x=a$ einwerthiger Zweig hinzugenommen wird. Diese Betrachtungen können in derselben Weise fortgesetzt werden und liefern folgendes Resultat:

Es seien in $x=a$ ein oder mehrere Windungspunkte vorhanden, ausserdem können noch einwerthige Zweige vorkommen. Der allgemeine Fall werde an folgendem Schema discutirt. Es bestehe etwa ein λ-blättriger, ein μ-blättriger, ein ν-blättriger Windungspunkt, $\lambda > \mu > \nu$, und es seien $\gamma \geqq 0$ einwerthige Zweige vorhanden. Dann giebt es für die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$, $\varrho = n$, n linearunabhängige Integrale dieser Art:

λ Integrale der Form

$$(4.)\qquad (x-a)^{\frac{\sigma_\mathfrak{b}}{\lambda}} \sum_0^\infty c_{\alpha\mathfrak{b}}(x-a)^{\alpha}, \quad \text{Mod. } c_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b}=1, \dots \lambda),$$

$\sigma_\mathfrak{b}$ ganzzahlig $\geqq 0$, worin je zwei Zahlen $\frac{\sigma_\mathfrak{b}}{\lambda}$ sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden;

μ Integrale der Form

$$(5.)\qquad (x-a)^{\frac{\sigma'_\mathfrak{b}}{\mu}} \sum_0^\infty c'_{\alpha\mathfrak{b}}(x-a)^{\alpha}, \quad \text{Mod. } c'_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b}=1, \dots \mu),$$

$\sigma'_\mathfrak{b}$ ganzzahlig $\geqq 0$, worin je zwei Zahlen $\frac{\sigma'_\mathfrak{b}}{\mu}$ sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, und eine Zahl $\frac{\sigma'}{\mu}$ nicht einer Zahl $\frac{\sigma}{\lambda}$ gleich ist;

ν Integrale der Form

$$(6.)\qquad (x-a)^{\frac{\sigma''_\mathfrak{b}}{\nu}} \sum_0^\infty c''_{\alpha\mathfrak{b}}(x-a)^{\alpha}, \quad \text{Mod. } c''_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b}=1, \dots \nu),$$

$\sigma''_\mathfrak{b}$ ganzzahlig $\geqq 0$, worin je zwei Zahlen $\frac{\sigma''_\mathfrak{b}}{\nu}$ sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, und eine Zahl $\frac{\sigma''}{\nu}$ nicht einer der Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}$, $\frac{\sigma'}{\mu}$ gleich ist;

γ Integrale der Form, wenn $\gamma > 0$,

$$(7.)\qquad (x-a)^{\sigma'''_\mathfrak{b}} \sum_0^\infty c'''_{\alpha\mathfrak{b}}(x-a)^{\alpha}, \quad \text{Mod. } c'''_{0\mathfrak{b}} \lessgtr 0, \qquad (\mathfrak{b}=1, \dots \gamma),$$

σ_b''' ganzzahlig $\geqq 0$, worin je zwei Zahlen σ''' nicht einander gleich sind, und eine Zahl σ''' nicht einer der Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}$ gleich ist.

Jetzt sind die von einander verschiedenen Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}, \sigma'''$, da der Exponent r jedes Integrales $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$, Mod. $c_0 \gtrless 0$ Wurzel der Exponentengleichung ist, die n Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho(s, x) = 0$, $\varrho = n$ bei $x = a$, und wenn man eine Gruppe wie die μ Zahlen $\frac{\sigma_b'}{\mu}$ betrachtet, die sich also zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, so ergiebt sich, dass, wenn diese Zahlen auf die kleinste Benennung gebracht sind, der Nenner μ so oft vorkommen muss, als unter den Zahlen 1 bis $\mu - 1$ relative Primzahlen gegen μ sind. Die Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}, \sigma'''$ liefern also folgende Gruppirung der Wurzeln der Exponentengleichung, nachdem dieselben auf die kleinste Benennung gebracht sind.

Es war $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$. Bei den n Wurzeln ist der grösste Nenner λ. Nun sind λ Wurzeln die Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}$, die sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Bei den $n-\lambda$ übrigen Wurzeln ist der grösste Nenner μ. Es sind μ dieser Wurzeln die Zahlen $\frac{\sigma'}{\mu}$, die sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Bei den $n-\lambda-\mu$ übrigen Wurzeln ist der grösste Nenner ν. Es sind ν dieser Wurzeln die Zahlen $\frac{\sigma''}{\nu}$, die sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Die übrigen $n-\lambda-\mu-\nu$ Wurzeln sind von einander verschiedene positive ganze Zahlen.

Andererseits soll nun mit den Wurzeln der Exponentengleichung, nachdem dieselben auf die kleinste Benennung gebracht sind, folgende Anordnung vorgenommen werden:

Der grösste vorkommende Nenner ist λ. Dann werden zuerst λ Wurzeln herausgenommen, die, wenn sie auf den gemeinschaftlichen Nenner λ gebracht sind, sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Wenn eine dieser Zahlen sich nicht unter den oben genannten Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}$ befindet, so könnte sie jedoch mit einer und nur einer dieser Zahlen gepaart werden, so dass diese beiden sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Wird in dem System der Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}$ σ''' die eine dieser

beiden Zahlen mit der anderen vertauscht, so erhält man ein neues System, welches eine Gruppirung der Wurzeln, wie die oben beschriebene, bildet. Hieraus ergiebt sich, dass bei den $n-\lambda$ übrigen Wurzeln als grösster Nenner μ vorkommt, und dass sich μ Wurzeln herausnehmen lassen, die, wenn sie auf den gemeinschaftlichen Nenner μ gebracht sind, sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Solche μ Wurzeln werden nun herausgenommen. In derselben Weise ist dann fortzufahren. Man erhält also durch dieses Verfahren eine Anordnung der Wurzeln, die eine Gruppirung von derselben Beschaffenheit, wie die des Systems $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}, \sigma'''$ bildet. Dadurch wird alsdann erkannt, dass ein λ-blättriger, μ-blättriger, ν-blättriger Windungspunkt und γ einwerthige Zweige vorhanden sind.

Wenn sich also aus dem System Nr. 3 (2.) ergeben hat, dass alle n Zweige in $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ linearunabhängig sind, so kann man, wie aus Nr. 5 I. und II. folgt, bei jedem Punkte, in welchem die Discriminante von $F(\overset{n}{s}, x)$ verschwindet, und bei $x = \infty$ (Nr. 2) vermittelst der Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho(s, x) = 0$, $\varrho = n$ die Verzweigung von s vor der Entwickelung der Zweige erkennen.

Hiermit lässt sich für eine solche algebraische Function auch die Zahl p, das Geschlecht der Function, unmittelbar bestimmen nach der von ***Riemann*** (Theorie der *Abel*schen Functionen Nr. 7) gegebenen Formel, die auch (siehe *C. Neumann,* Vorlesungen über die *Abel*schen Integrale 2. Aufl. p. 171), wenn beliebige Windungspunkte vorhanden sind, gilt, $2(p-1) = w-2n$, wo w die Summe der Ordnungen der Verzweigungen ist und jeder μ-blättrige Windungspunkt als Verzweigung $(\mu-1)$-facher Ordnung zählt, n die Anzahl der Zweige.

III. Die Anzahl ϱ der linearunabhängigen Zweige von s sei kleiner als die Anzahl n der Zweige.

Aus der Darstellung (2.) (3.) der in einem μ-blättrigen Windungspunkt zusammenhängenden μ Zweige geht hervor, dass die δ ersten Zweige linearunabhängig, und die übrigen durch dieselben ausdrückbar sind. Da aber alle μ Zweige von einander verschieden sind, so haben die Zahlen σ_1 bis σ_δ einerseits und μ andererseits keinen gemeinschaftlichen Theiler.

Durch Betrachtungen, die denen in II. entsprechen, ergiebt sich nun Folgendes: Es sei wieder das allgemeine Verhalten an nachstehendem

Schema dargestellt. Ein λ-blättriger, μ-blättriger, ν-blättriger Windungspunkt, $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$, und γ einwerthige Zweige, $\gamma \geqq 0$, seien bei $x = a$ vorhanden, also $\lambda+\mu+\nu+\gamma = n$. Dann giebt es für die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ folgende ϱ linearunabhängige Integrale.

λ_1 Integrale, wo $0 < \lambda_1 \leqq \lambda$, der Form

$$(8.)\quad (x-a)^{\frac{\sigma_{\mathfrak{b}}}{\lambda}} \sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (x-a)^{\mathfrak{a}},\quad \text{Mod. } c_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \dots \lambda_1),$$

$\sigma_{\mathfrak{b}}$ ganzzahlig $\geqq 0$, je zwei Zahlen $\frac{\sigma_{\mathfrak{b}}}{\lambda}$ unterscheiden sich nicht um eine ganze Zahl, die Zahlen $\sigma_{\mathfrak{b}}$ einerseits und λ andererseits haben keinen gemeinschaftlichen Theiler;

μ_1 Integrale, wo $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu$, bei $\mu_1 > 0$ von der Form

$$(9.)\quad (x-a)^{\frac{\sigma'_{\mathfrak{b}}}{\mu}} \sum_0^\infty c'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (x-a)^{\mathfrak{a}},\quad \text{Mod. } c'_{0\mathfrak{b}} \lessgtr 0, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \dots \mu_1),$$

$\sigma'_{\mathfrak{b}}$ ganzzahlig $\geqq 0$, je zwei Zahlen $\frac{\sigma'_{\mathfrak{b}}}{\mu}$ unterscheiden sich nicht um eine ganze Zahl, eine Zahl $\frac{\sigma'}{\mu}$ ist nicht einer Zahl $\frac{\sigma}{\lambda}$ gleich, die Zahlen $\sigma'_{\mathfrak{b}}$ und die Zähler in den etwa vorhandenen Brüchen $\frac{\sigma}{\lambda}$, welche auf den Nenner μ gebracht werden können, einerseits und μ andererseits haben keinen gemeinschaftlichen Theiler;

ν_1 Integrale, wo $0 \leqq \nu_1 \leqq \nu$, bei $\nu_1 > 0$ von der Form

$$(10.)\quad (x-a)^{\frac{\sigma''_{\mathfrak{b}}}{\nu}} \sum_0^\infty c''_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (x-a)^{\mathfrak{a}},\quad \text{Mod. } c''_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \dots \nu_1),$$

$\sigma''_{\mathfrak{b}}$ ganzzahlig $\geqq 0$, je zwei Zahlen $\frac{\sigma''_{\mathfrak{b}}}{\nu}$ unterscheiden sich nicht um eine ganze Zahl, eine Zahl $\frac{\sigma''}{\nu}$ ist nicht einer Zahl $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}$ gleich, die Zahlen $\sigma''_{\mathfrak{b}}$ und die Zähler in den etwa bestehenden Brüchen $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}$, welche auf den Nenner ν gebracht werden können, einerseits und ν andererseits haben keinen gemeinschaftlichen Theiler;

γ_1 Integrale, wo $0 \leqq \gamma_1 \leqq \gamma$, bei $\gamma_1 > 0$ von der Form

$$(11.)\quad (x-a)^{\sigma'''_{\mathfrak{b}}} \sum_0^\infty c'''_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (x-a)^{\mathfrak{a}},\quad \text{Mod. } c'''_{0\mathfrak{b}} \gtrless 0, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \dots \gamma_1),$$

$\sigma'''_{\mathfrak{b}}$ ganzzahlig $\geqq 0$, je zwei Zahlen $\sigma'''_{\mathfrak{b}}$ sind nicht einander gleich, eine Zahl σ''' ist nicht gleich einer Zahl $\frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\sigma'}{\mu}, \frac{\sigma''}{\nu}$.

Die von einander verschiedenen Zahlen $\frac{\sigma}{\lambda}$, $\frac{\sigma'}{\mu}$, $\frac{\sigma''}{\nu}$, σ''' sind die ϱ Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho(s, x) = 0$.

Hiermit ist nun das Verhalten der Wurzeln der Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ für $x = a$ in Verbindung zu bringen. Aus der Darstellung von $F(\overset{n}{s}, x)$ unter der Form

$$(12.) \qquad (s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)$$

wo s_1 bis s_n die Entwickelungen der n Zweige sind, die bei einem μ-blättrigen Windungspunkte die Form (2.) (3.) haben, ergiebt sich, wenn x in a übergeht, dass auf einen μ-blättrigen Windungspunkt μ gleiche Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ kommen. Es finden sich also unter der gemachten Annahme in dieser Gleichung λ gleiche, μ gleiche, ν gleiche Wurzeln, die auch unter einander gleich sein können, ausser diesen γ, unter denen auch gleiche sich finden und die auch vorhergehenden gleich sein können.

Indem man beide Gleichungen zusammen betrachtet, kann man unter Anwendung des Vorhergehenden (8.) bis (11.) folgendes Resultat herleiten:

Bei den n Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ sei α die höchste Anzahl der einander gleichen Wurzeln, so kann kein höherer als ein α-blättriger Windungspunkt vorkommen. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$, seien auf die kleinste Benennung gebracht, dieselben enthalten dann Nenner, die $\leqq \alpha$ sein müssen. Es möge nun wenigstens einmal der Nenner α vorkommen, so kann auch der höchstblättrige Windungspunkt nicht niedriger als α-blättrig sein. Durch denselben werden α gleiche Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ absorbirt. Die nächst höchste Anzahl der gleichen Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ sei β, wo β auch gleich α sein darf, so kann weiter kein höherer als β-blättriger Windungspunkt vorkommen. Es sei $\beta = \alpha$. Nun möge wenigstens zweimal der Nenner α in zwei Exponenten, die sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden, vorkommen, so kann auch der nächst höchste Windungspunkt nicht niedriger als β-blättrig sein. Es sei $\beta < \alpha$. Dann müssen die in den Exponenten enthaltenen Nenner, die kleiner als α sind, $\leqq \beta$ oder Theiler von α sein. Es möge nun wenigstens einmal der Nenner β, wenn β nicht Theiler von α ist, oder, falls β Theiler von α ist, wenigstens zweimal der Nenner β in zwei Exponenten, die sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden, vorkommen, so kann auch der nächst

höchste Windungspunkt nicht niedriger als β-blättrig sein. Durch den β-blättrigen Windungspunkt werden von Neuem β gleiche Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ absorbirt. Die nächst höchste Anzahl der gleichen Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ sei γ, wo γ auch gleich β sein darf, so kann weiter kein höherer als ein γ-blättriger Windungspunkt vorkommen. Es sei $\gamma = \beta$. Dann möge, wenn $\beta = \alpha$ ist, wenigstens dreimal der Nenner α in drei Exponenten, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, und wenn $\beta < \alpha$ ist, wenigstens zweimal der Nenner β, wenn β nicht Theiler von α ist, in zwei Exponenten, die sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden, und wenn β Theiler von α ist, wenigstens dreimal der Nenner β in solchen Exponenten vorkommen, so kann auch der nächste Windungspunkt nicht niedriger als γ-blättrig sein. Es sei $\gamma < \beta$. Dann müssen die in den Exponenten enthaltenen Nenner, die kleiner als β sind, $\leqq \gamma$ oder Theiler von α oder β sein. Es möge nun wenigstens einmal der Nenner γ, wenn γ nicht Theiler von α oder β ist, oder, falls γ Theiler von α oder β ist, wenigstens zweimal der Nenner γ in zwei Exponenten, die sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden, und falls γ Theiler von α und β ist wenigstens dreimal der Nenner γ in drei Exponenten, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, vorkommen, so kann der nächst niedrigere Windungspunkt nicht niedriger als γ-blättrig sein. Durch den γ-blättrigen Windungspunkt werden wiederum γ gleiche Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ absorbirt. In derselben Weise kann man weiter fortfahren, bis man zu den einfachen Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ gelangt, denen nur einwerthige Zweige entsprechen können.

Es ist hieraus ersichtlich, wie sich durch combinirte Betrachtung der Wurzeln der Exponentengleichung von $f_\varrho(s, x) = 0$ und der Wurzeln der Gleichung $F(\overset{n}{s}, a) = 0$, wenn $\varrho < n$ ist, in vielen Fällen die Verzweigung von s bei $x = a$ vor Entwickelung der Zweige erkennen lässt.

6.

Die Integrale der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ sollen bei einem singulären oder nichtsingulären Punkte $x = a$ im Endlichen entwickelt werden. Bei $x = \infty$ ist $x = t^{-1}$ einzusetzen (vgl. Nr. 2). Die singulären

Punkte von $f_\varrho = 0$ im Endlichen seien a_1, a_2 bis a_ν (bei $n \geqq 2$ ist $\nu \geqq 1$). Die Differentialgleichung $f_\varrho = 0$ ist nun

$$(1.)\qquad \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho} + p_1 \frac{d^{\varrho-1} z}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + p_\varrho z = 0,$$

$$(2.)\qquad p_\alpha = \frac{\psi_\alpha(x)}{(\varphi(x))^\alpha} \;{\scriptstyle(\alpha=1,\dots\varrho)},\quad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\nu),$$

$\psi_\alpha(x)$ ein Polynom von x von einem Grade $\leqq \alpha(\nu-1)$. Die Differentialgleichung (1.) sei auf die Form

$$(3.)\qquad (\varphi(x))^\varrho \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho} + (\varphi(x))^{\varrho-1}\psi_1(x)\frac{d^{\varrho-1} z}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + \psi_\varrho(x) z = 0$$

gebracht. Nun werde in (3.) eine Entwickelung der Form

$$(4.)\qquad (x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha,$$

worin c_0 nicht von Null verschieden zu sein braucht, eingesetzt. Dann ergiebt sich, wenn a einer der Punkte a_1 bis a_ν ist, dadurch, dass der Coefficient von $(x-a)^{r+k}$ gleich Null gesetzt wird, und wenn a ein nichtsingulärer Punkt ist, dadurch, dass der Coefficient von $(x-a)^{r+k-\varrho}$ gleich Null gesetzt wird, eine Recursionsformel der Form

$$(5.)\qquad A_0 c_k + A_1 c_{k-1} + \cdots + A_l c_{k-l} = 0.$$

In dieser ist, wenn a einer der Punkte a_1 bis a_ν, $A_0 = \left|\frac{\varphi(x)}{x-a}\right|^\varrho_{x=a} B_0$, $l = (\nu-1)\varrho$, und wenn a ein nichtsingulärer Punkt, $A_0 = (\varphi(x))^\varrho_{x=a} B_0$, $l = \nu\varrho$ und in beiden Fällen B_0 gleich

$$(6.)\qquad \begin{cases} (r+k)(r+k-1)\dots(r+k-\varrho+1) \\ +(p_1(x-a))_{x=a}(r+k)(r+k-1)\dots(r+k-\varrho+2)+\cdots+(p_\varrho(x-a)^\varrho)_{x=a}. \end{cases}$$

Die Recursionsformel (5.) geht von $k=0$ an, die c mit negativem Zeiger sind gleich Null zu setzen. In (5.) ist A_i in dem ersten Falle gleich

$$(7.)\qquad \begin{cases} C_{0i}(r+k-i)(r+k-i-1)\dots(r+k-i-\varrho+1) \\ \qquad + C_{1i}(r+k-i)(r+k-i-1)\dots(r+k-i-\varrho+2)+\cdots+C_{\varrho i}, \\ \qquad C_{hi} = \frac{1}{i!}\left\{\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\varphi(x)}{x-a}\right)^{\varrho-h}\psi_h(x)\right\}_{x=a} \quad {\scriptstyle(h=0,\dots\varrho)}, \end{cases}$$

in dem zweiten Falle gleich

$$(8.)\qquad \begin{cases} C_{0i}(r+k-i)(r+k-i-1)\dots(r+k-i-\varrho+1) \\ +C_{1i}(r+k-i)(r+k-i-1)\dots(r+k-i-\varrho+2)+\cdots+C_{ii}(r+k-i)\dots(r+k-\varrho+1), \\ \qquad C_{hi} = \frac{1}{(i-h)!}\left\{\frac{d^{i-h}}{dx^{i-h}}(\varphi(x))^{\varrho-h}\psi_h(x)\right\}_{x=a} \quad {\scriptstyle(h=0,\dots i,\ \psi_{\varrho+1}=\cdots=\psi_i=0)}. \end{cases}$$

Für $k = 0$ wird $B_0 = 0$ die Exponentengleichung von $f_\varrho = 0$ bei $x = a$. Es sei nun a einer der Punkte, in welchen $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ mehrfache Wurzeln hat. Die Wurzeln der Exponentengleichung sind nach Nr. 2 von einander verschiedene positive rationale Zahlen. Eine Gruppe derselben, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, sei $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_\lambda$. Es sei

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + k_1, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + k_2, \quad . \; . \; . \quad \varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda-1} + k_{\lambda-1}.$$

Nun besteht gemäss Nr. 2 (1.) ein Integral von $f_\varrho = 0$ von der Entwickelung

$$(9.) \quad \begin{cases} C_1(x-a)^{\varepsilon_1}\left(1+\sum_1^\infty \alpha_a(x-a)^a\right)+C_2(x-a)^{\varepsilon_2}\left(1+\sum_1^\infty \beta_a(x-a)^a\right)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots + C_\lambda(x-a)^{\varepsilon_\lambda}\left(1+\sum_1^\infty \lambda_a(x-a)^a\right), \end{cases}$$

wo $C_1, C_2, \ldots C_\lambda$ willkürliche Constanten sind.

Wird in (6.) $r = \varepsilon_1$ gesetzt, so verschwindet B_0 für die Werthe von k gleich 0, k_1, k_1+k_2 bis $k_1+k_2+\cdots+k_{\lambda-1}$. *In einer Entwickelung, welche zu einem der Exponenten* ε_1 *bis* ε_λ, *z. B. zu* $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + k_1$ *gehört,*

$$(10.) \quad (x-a)^{\varepsilon_2}\sum_0^\infty c_a(x-a)^a, \quad \text{Mod. } c_0 \gtrless 0,$$

kann man nun gemäss (9.) *die Coefficienten mit den Zeigern* k, *für welche* A_0 *in* (5.), *wenn* $r = \varepsilon_2$ *gesetzt wird, verschwindet, nämlich* $c_{k_2}, c_{k_2+k_3}, \ldots c_{k_2+k_3+\cdots+k_{\lambda-1}}$ *annulliren. Alle übrigen Coefficienten in dieser Entwickelung werden dann durch die Recursionsformel* (5.), *die eine constante Anzahl von Gliedern enthält, geliefert unter der Form* $c_0 G_k$, G_k *von* c_0 *unabhängig.*

Ein Punkt a, der nicht zu den vorhin betrachteten Punkten, aber zu den singulären Punkten von $f_\varrho = 0$ gehört, ist ein ausserwesentlich singulärer Punkt. Dann hat die Exponentengleichung bei $x = a$ Wurzeln, die von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, welche nicht die Reihe $0, 1, \ldots \varrho-1$ bilden. Und ist a ein nichtsingulärer Punkt, so hat die Exponentengleichung die Wurzeln $0, 1, \ldots \varrho-1$. In beiden Fällen gehört zu einer Wurzel r ein Integral der Form $(x-a)^r\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$, Mod $c_0 \gtrless 0$, die vorigen Betrachtungen über die Entwickelungen finden daher auch hier statt. Die Coefficienten in den Entwickelungen werden durch die Recursionsformel (5.) geliefert.

Die Berechnung des Werthes der Integrale und ihrer Ableitungen mit vorgeschriebener Annäherung innerhalb des Bezirkes eines Punktes a erfolgt auf Grund des Umstandes, dass f_ϱ ein regulärer Differentialausdruck ist, nach den Angaben in der Abh. des Verf. Bd. 91 Nr. 3 II.

7.

Es sollen nun die Zweige der algebraischen Function s aus $\overset{n}{F}(s, x) = 0$ bei einem Punkte $x = a$ im Endlichen vermittelst der Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ dargestellt werden. Der Fall $x = \infty$ kommt auf diesen durch die Substitution $x = t^{-1}$ zurück (Nr. 2). Der Punkt a sei einer der Punkte, in denen $\overset{n}{F}(s, a) = 0$ mehrfache Wurzeln hat. In $x = a$ möge ein μ-blättriger Windungspunkt vorkommen. Dann haben die μ in demselben zusammenhängenden Zweige eine Entwickelung der Form Nr. 5 (2.). Da diese Entwickelung die Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ befriedigt, deren Integrale gemäss Nr. 6 (10.) entwickelt sind, so muss sie durch lineare Verbindung mit constanten Coefficienten derjenigen dieser Integrale darstellbar sein, bei welchen die rationalen Exponenten auf den Nenner μ gebracht werden können. Die Exponenten sind alle unter einander verschieden, und die bezüglichen Integrale sind daher von der Form

$$(1.)\quad (x-a)^{\frac{\tau_1}{\mu}}\varphi_1(x-a),\quad (x-a)^{\frac{\tau_2}{\mu}}\varphi_2(x-a),\quad \dots\quad (x-a)^{\frac{\tau_\eta}{\mu}}\varphi_\eta(x-a),$$

wo die φ Entwickelungen der Form $1+\sum_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$ haben, die τ positive ganze Zahlen sind, so dass $0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta$. Dann ist also die Entwickelung der μ-werthigen Function, welche die in dem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden Zweige enthält, gleich dem Ausdrucke

$$(2.)\quad \gamma_1(x-a)^{\frac{\tau_1}{\mu}}\varphi_1(x-a)+\gamma_2(x-a)^{\frac{\tau_2}{\mu}}\varphi_2(x-a)+\cdots+\gamma_\eta(x-a)^{\frac{\tau_\eta}{\mu}}\varphi_\eta(x-a),$$

worin die γ Constanten sind. Die Entwickelung eines bei $x = a$ einwerthigen Zweiges ist einem Ausdrucke derselben Form für $\mu = 1$ gleich, der vermittelst der Integrale von $f_\varrho = 0$, die zu den ganzzahligen Exponenten gehören, gebildet ist.

Die Constanten γ in dem Ausdrucke (2.) ergeben sich successive, sobald die Entwickelung Nr. 5 (2.) der in einem μ-fachen Windungspunkte zusammenhängenden μ Zweige, bezüglich die Entwickelung des einwerthigen Zweiges bis zu dem Gliede $(x-a)^{\frac{\tau_\eta}{\mu}}$ ermittelt ist (siehe Nr. 8), indem auf beiden Seiten die Coefficienten der Potenzen $(x-a)^{\frac{\tau_1}{\mu}}$, $(x-a)^{\frac{\tau_2}{\mu}}$ bis $(x-a)^{\frac{\tau_\eta}{\mu}}$ einander gleich gesetzt werden. *Und da die Entwickelungen der Grössen φ vermittelst der Recursionsformel Nr. 6* (5.), *die eine constante Anzahl der Glieder linear enthält, vollständig dargestellt sind gemäss Nr. 6* (10.), *so ist damit auch der Ausdruck* (2.) *vollständig gegeben.*

Bei einem anderen Punkte a sind alle Zweige von s einwerthig und werden durch Ausdrücke der Form (2.) $\mu = 1$ dargestellt, worin ϱ Integrale von $f_\varrho = 0$ eingehen, die zu den ϱ positiven, ganzzahligen Exponenten gehören. Die Entwickelungen der Integrale erfolgen nach Nr. 6 (10.) vermittelst der Recursionsformel Nr. 6 (5.). Die Constanten γ ergeben sich durch die Entwickelung jedes Zweiges aus der Gleichung Nr. 1 (5.).

8.

Die Coefficienten in den Entwickelungen der Zweige von s bei einem Punkte, in dem $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, werden nach der vorigen Nummer bis zu dem dort angegebenen Gliede zur Bestimmung der Constanten γ Nr. 7 (2.) gebraucht. Diese Coefficienten lassen sich nach den von *Puiseux* (Recherches sur les fonctions algébriques in *Liouvilles* Journal T. XV), Herrn *Hamburger* (Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen in *Schlömilchs* Zeitschrift Jahrgang XVI) und Herrn *Königsberger* (Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen) gegebenen Methoden bestimmen. Nach diesen Methoden erhält man bei einem solchen Punkte die Trennung der in den Windungspunkten zusammenhängenden, sowie der einwerthigen Zweige und findet während dieses Trennungsprocesses die Coefficienten in den Entwickelungen bis zur erfolgten Trennung successive durch Auflösung algebraischer Gleichungen, die folgenden Coefficienten vermittelst einer Recursionsformel, in welcher die Anzahl der Glieder mit dem Stellenzeiger wächst, und unter Anwendung des gesammten einschlägigen Verfahrens. Man vergleiche hierbei die Abhandlung des Herrn *Kronecker* Bd. 91 dieses Journals: Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln.

Nun kann man aber auf Grund der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ zur Trennung der Entwickelungen von s und Bestimmung der Coefficienten ein directes Verfahren anwenden, welches zugleich sehr übersichtlich ist.

Bevor der allgemeine Fall behandelt wird, sollen folgende Fälle untersucht werden, in denen die Trennung bereits vollzogen ist und die Coefficientenbestimmung besonders einfach wird.

Es möge nach den Angaben von No. 5 vor Entwickelung der Zweige sich feststellen lassen, welche Verzweigungen bei $x = a$ vorkommen, etwa $\varkappa_1$-mal ein λ-blättriger, $\varkappa_2$-mal ein μ-blättriger, $\varkappa_3$-mal ein ν-blättriger Win-

dungspunkt, $\lambda > \mu > \nu$, die etwa noch übrigen Zweige seien einwerthig oder alle Zweige einwerthig. In der Gleichung $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ sollen $\varkappa_1$ λ-fache Wurzeln α_r $(r = 1, \dots \varkappa_1)$, $\varkappa_2$ μ-fache Wurzeln β_r $(r = 1, \dots \varkappa_2)$, $\varkappa_3$ ν-fache Wurzeln γ_r $(r = 1, \dots \varkappa_3)$ vorkommen, ausserdem entweder nur einfache Wurzeln oder solche mehrfache, deren Vielfachheit kleiner als ν ist. Die Vertheilung der Wurzeln auf Windungs- und gewöhnliche Punkte steht also eindeutig fest. (Vgl. Nr. 5 (12.)). Auch kann diese Bedingung in Betreff der Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ dahin abgeändert werden, dass auf mehrere gleichblättrige Windungspunkte ein und dieselbe Wurzel kommt. wenn diese nicht bei andersblättrigen Windungspunkten oder gewöhnlichen Punkten vorkommen kann, z. B. wenn in dem obigen Falle $\lambda > 2\mu$ ist, und eine 2μ-fache Wurzel an Stelle von zwei μ-fachen Wurzeln vorkommt.

Einem μ-blättrigen Windungspunkte komme die Wurzel β von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ zu, die zunächst bei keinem anderen Windungs- oder gewöhnlichen Punkte in $x = a$ sich finden soll. Die Entwickelung der Function s bei diesem Windungspunkte ist alsdann

$$(1.)\qquad s = \beta + \sum_1^\infty c_\lambda \zeta^\lambda, \quad \zeta = (x-a)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Wird nun in Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$, $s-\beta = u$, $x-a = \xi$ gesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung

$$(2.)\qquad u^n + A_1 u^{n-1} + \cdots + A_{n-\mu} u^\mu + \Sigma B u^p \xi^q = 0,$$

die A und B Constanten, Mod. $A_{n-\mu} \gtrless 0$; $\Sigma B u^p \xi^q$ enthält die Glieder, in denen ξ vorkommt, die Gleichung ist in Bezug auf u vom $n$ten Grade in dem Gliede u^n. Nun wird in (2.) direct $\xi = \zeta^\mu$ gesetzt. Die Gleichung (2.) wird alsdann erfüllt, wenn für u die μ Reihen

$$(3.)\qquad \sum_1^\infty c_\lambda (\omega^r \zeta)^\lambda \quad {\scriptstyle (r=0,\dots\mu-1)}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$$

gesetzt werden, die gleichzeitig zu betrachten sind. Wird $u = \zeta v$ gesetzt, alsdann durch ζ^μ dividirt, so geht aus (2.) eine Gleichung hervor

$$(4.)\qquad A_{n-\mu} v^\mu + C + \Sigma B' v^{p'} \zeta^{q'} = 0,$$

C eine Constante; $\Sigma B' v^{p'} \zeta^{q'}$ enthält die Glieder, in denen sich ζ findet, die Gleichung ist in Bezug auf v vom $n$ten Grade in dem Gliede $v^n \zeta^{n-\mu}$. Dieser Gleichung müssen also die μ Reihen

$$v = \sum_1^\infty c_\lambda \omega^{r\lambda} \zeta^{\lambda-1} \qquad {\scriptstyle (r=0,\dots\mu-1)},$$

genügen. Die Gleichung

$$(5.)\quad A_{n-\mu} v^{\mu} + C = 0$$

hat zu Wurzeln c_1, $c_1\omega$, $c_1\omega^2$, ... $c_1\omega^{\mu-1}$. Es sei c_1 von Null verschieden, also jede Wurzel in (5.) einfach. Gleichung (4.) werde durch

$$(6.)\quad P(v) + Q(v, \zeta) = 0$$

bezeichnet, wo $P(v)$ gleich dem Ausdrucke in (5.). Wenn eine der Entwickelungen $\sum_1^\infty c_\alpha \omega^{r\alpha} \zeta^{\alpha-1}$ die Bezeichnung $\sum_0^\infty g_\alpha \zeta^\alpha$ erhält und in (6.) eingesetzt wird, so ergiebt sich für die Coefficienten g_α eine Recursionsformel, nach welcher $g_k \left(\frac{dP}{dv}\right)_{v=g_0}$ eindeutig durch g_{k-1}, g_{k-2} bis g_0 ausgedrückt wird. Ist $c_1 = 0$, so hat $P(v) = 0$ eine mehrfache, μ-fache, Wurzel. Dann wird $v - c_1 = \zeta w$ in (6.) gesetzt, und durch die in allen Gliedern enthaltene Potenz von ζ dividirt. Hierdurch gehe eine Gleichung

$$(7.)\quad P'(w) + Q'(w, \zeta) = 0$$

hervor, wo Q' die Glieder umfasst, die ζ enthalten, die Gleichung in Bezug auf w vom $n$ten Grade ist in einem Gliede $w^n \zeta^\sigma$, $\sigma \geqq 0$, $P'(w)$ daher nicht identisch verschwinden kann. Dieser Gleichung genügen die μ Reihen

$$(8.)\quad \sum_2^\infty c_\alpha \omega^{r\alpha} \zeta^{\alpha-2} \qquad (r = 0, \dots \mu-1).$$

Es ergiebt sich nun aus den gemachten Voraussetzungen, dass die Wurzeln der Gleichung $P'(w) = 0$ die Grössen $c_2 \omega^{2r} (r = 0, \dots \mu-1)$ sein müssen. Die Gleichung (7.) wird nämlich durch die μ Reihen (8.) erfüllt, ausserdem durch $n-\mu$ Entwickelungen, die aus den $n-\mu$ übrigen Zweigen von s durch dieselben Substitutionen hervorgehen, und daher nach den gemachten Voraussetzungen negative Exponenten von ζ enthalten, nämlich mit ζ^{-2} und nicht verschwindendem Coefficienten beginnen. Der Coefficient von w^n in (7.) war ζ^σ, und das Polynom in (7.) ist gleich

$$(9.)\quad \zeta^\sigma (w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_n),$$

worin für w_1, w_2 bis w_n die Entwickelungen der n Zweige einzusetzen sind. Da unter denselben $n-\mu$ Zweige vorkommen, deren Entwickelung mit einer Potenz mit negativem Exponenten, nämlich ζ^{-2}, anfängt, so muss σ gleich der Summe dieser negativen Anfangsexponenten, nämlich gleich $2(n-\mu)$ sein, damit, wenn für w in dem Polynom in (7.) und in (9.) ein beliebiger Werth, der nicht mit $c_2\omega^{2r}$ zusammenfällt und der nicht $P'(w) = 0$

erfüllt, genommen wird, der endliche von Null verschiedene Werth, dem das Polynom in (7.) für $\zeta = 0$ gleich ist, dem Werthe, in den (9.) für $\zeta = 0$ übergeht, gleich sein kann. Es nimmt also der Ausdruck (9.) die Form an

$$(10.)\quad (w-w_1)(w-w_2)\dots(w-w_\mu)(\zeta^2 w-\zeta^2 w_{\mu+1})\dots(\zeta^2 w-\zeta^2 w_n),$$

worin $\zeta^2 w_{\mu+1}$ bis $\zeta^2 w_n$ für $\zeta = 0$ in von Null verschiedene Constanten übergehen, woraus sich ergiebt, dass für $\zeta = 0$ (10.) in das Polynom

$$(11.)\quad A(w-c_2)(w-c_2\omega^2)(w-c_2\omega^4)\dots(w-c_2\omega^{2(\mu-1)})$$

übergeht, wo A eine Constante ist. Dieses Polynom ist also $P'(w)$, und die Gleichung $P'(w) = 0$ hat die Wurzeln $c_2\omega^{2r}$ $(r = 0, \dots \mu-1)$.

Die Wurzeln von $P'(w) = 0$ sind nun entweder alle einfach, oder zerfallen in Gruppen mehrfacher, etwa α-facher $(\alpha \leqq \mu)$. In dem ersten Falle tritt wieder das bei (6.) angegebene Verfahren ein. In letzterem Falle seien die α gleichen Wurzeln einer Gruppe durch c_2' bezeichnet und die bezüglichen Reihen durch

$$(12.)\quad c_2'+\sum_3^\infty c_a\omega^{ra}\zeta^{a-2},$$

wo für r die den α gleichen Wurzeln c_2' entsprechenden Zahlen aus $c_2\omega^{2r}$ einzusetzen sind. Dann wird in (7.) $w-c_2' = \zeta z$ gesetzt und durch die in allen Gliedern enthaltene Potenz von ζ dividirt. Hierdurch gehe eine Gleichung

$$(13.)\quad P''(z)+Q''(z,\zeta) = 0$$

hervor, wo Q'' alle Glieder enthält, in denen ζ vorkommt, die Gleichung in Bezug auf z vom $n$ten Grade ist in einem Gliede $z^n\zeta^\tau$, $\tau \geqq 0$, und daher $P''(z)$ nicht identisch verschwinden kann. Die Wurzeln der Gleichung $P''(z) = 0$ sind nun die α Grössen $c_3\omega^{3r}$ aus (12.), wie sich durch dieselbe Betrachtungsweise ergiebt, wie die war, welche zur Ermittelung der Wurzeln der Gleichung $P'(w) = 0$ angestellt worden ist. Es ist alsdann wieder das nämliche Verfahren wie früher anzuwenden und in gleicher Weise ist fortzufahren. Man erhält also successive die Coefficienten in den μ Reihen $\sum_1^\infty c_a\omega^{ra}\zeta^a$ $(r = 0, \dots \mu-1)$, und hat die Ermittelung der Coefficienten fortzusetzen bis zu dem Gliede, welches in dem Ausdrucke der μ Zweige Nr. 7 (2.) den Exponenten τ_η hat. Die Ermittelung einer der μ Entwickelungen genügt in diesem Falle zur Bestimmung der Constanten in dem Ausdrucke Nr. 7 (2.). Es ist zugleich aus der Darstellung Nr. 7 (2.) der μ Entwickelungen $\beta+\sum_1^\infty c_a\omega^{ra}\zeta^a$ $(r = 0, \dots \mu-1)$ ersichtlich, dass, wenn

diese von einander verschiedenen Entwickelungen bis zum Gliede τ_η fortgesetzt sind, dieselben sich als von einander verschieden herausstellen müssen.

Es seien nun mehrere, etwa λ, einwerthige Entwickelungen, auf die ein und dieselbe Wurzel β' von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ kommt, die sich bei Windungspunkten nicht findet, zu behandeln. Es wird $s-\beta' = u$, $x-a = \zeta$ gesetzt, und man hat für u die λ Reihen

$$(14.) \qquad \sum_1^\infty c_\alpha^{(\sigma)} \zeta^\alpha \qquad (\sigma = 0, \ldots \lambda-1),$$

gleichzeitig zu betrachten. Das Verfahren ist dann dasselbe wie vorhin. Wird $u = \zeta v$ in die Gleichung eingesetzt, wodurch

$$(15.) \qquad S(v) + T(v, \zeta) = 0$$

hervorgehe, wo $T(v, \zeta)$ die Glieder, die ζ enthalten, umfasst, so muss wieder $S(v) = 0$ die Wurzeln $c_1^{(\sigma)}$ $(\sigma = 0, \ldots \lambda-1)$ haben, was gemäss den gemachten Voraussetzungen auf dieselbe Weise, wie bei (7.) bewiesen wird, und das dort innegehaltene Verfahren ist auch hier weiter anzuwenden. Die Entwickelungen sind zu ermitteln bis zu dem Gliede mit dem Exponenten τ_η für $\mu = 1$ aus dem Ausdrucke Nr. 7 (2.).

Auf eine Combination der beiden vorhergehenden Fälle kommt die Behandlung des Falles hinaus, wenn bei $\varkappa$ μ-blättrigen Windungspunkten ein und dieselbe Wurzel β aus $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ vorkommt, die sich bei anderen Windungspunkten oder gewöhnlichen Punkten nicht findet. Dann ist $s-\beta = u$, $x-a = \zeta^\mu$ zu setzen, und man erhält für u die $\varkappa\mu$ Reihen

$$(16.) \qquad \sum_1^\infty c_\alpha^{(\sigma)} \omega^{r\alpha} \zeta^\alpha, \quad (\sigma = 0, \ldots \varkappa-1, \; r = 0, \ldots \mu-1), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$$

gleichzeitig zu behandeln, und hat zu dem Zwecke das frühere Verfahren anzuwenden. Die Entwickelungen sind bis zu dem Gliede mit dem Exponenten τ_η aus dem Ausdrucke No. 7 (2.) fortzusetzen. Alsdann stellen sich, wie aus den $\varkappa$ Ausdrücken No. 7 (2.), die den $\varkappa$ Windungspunkten entsprechen, ersichtlich ist, die $\varkappa\mu$ Entwickelungen als unter einander verschieden heraus, und als solche, welche zu je μ einem der μ-blättrigen Windungspunkte angehören.

Nun soll der allgemeine Fall der Trennung der Entwickelungen von s und der Coefficientenbestimmung behandelt werden. Zu dem Zwecke wird die Darstellung eines Zweiges von s vermittelst der Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ bei $x = a$ betrachtet, welche die allgemeine Form hat, dass alle ϱ Integrale

(Nr. 6) linear mit constanten Coefficienten eingehen. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner der Exponenten, zu denen die ϱ Integrale gehören, sei N, und es seien alle Exponenten durch Brüche mit dem Nenner N ausgedrückt. *Alsdann wird in den Integralen $x-a=\zeta^N$ gesetzt.*

Die in einem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden μ Zweige gehen aus dem Ausdrucke No. 7 (2.) hervor, wenn an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ eintritt $\omega^r(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ $(r=0,\ldots \mu-1)$. Wird dann $x-a=\zeta^N$ gesetzt, so erhalten die μ Zweige Entwickelungen, welche durch die von ζ abhängenden Integrale von $f_\varrho=0$ (Nr. 6) linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt sind und daher nach Potenzen von ζ mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreiten. Demnach nehmen die Entwickelungen aller n Zweige von s diese Form an. Ist die grösste Wurzel der Exponentengleichung von $f_\varrho(s,x)=0$ bei $x=a$ gleich $\frac{K}{N}$, so werden die n Entwickelungen der Zweige von s, wenn sie bis ζ^K fortgesetzt sind, unter einander verschieden. Um diese Entwickelungen aufzufinden, wird in Gleichung $F(\overset{n}{s},x)=0$ $x-a=\zeta^N$ gesetzt, die n Entwickelungen nach ζ sind die n Wurzeln dieser Gleichung, und gehen für $\zeta=0$ bezüglich in die n Wurzeln von $F(\overset{n}{s},a)=0$ über (vgl. Nr. 5 (12.)). Es tritt nun, um die Coefficienten in diesen Entwickelungen zu bestimmen, wieder das oben beschriebene Verfahren nebst bezüglichen Beweisen ein, bei einer einfachen Wurzel von $F(\overset{n}{s},a)=0$ das bei (6.), bei einer mehrfachen Wurzel das bei (14.) angegebene Verfahren. Die Entwickelungen sind bis zu dem Gliede ζ^K zu ermitteln. Nachdem dieses geschehen ist, wird jede dieser Entwickelungen durch die ϱ Integrale von $f_\varrho(s,x)=0$ (Nr. 6), welche von ζ abhängen, linear mit constanten Coefficienten dargestellt (vgl. Nr. 7). Alsdann ist zuzusehen, welche von diesen constanten Coefficienten verschwinden. Dieses ist immer durchführbar, wenn die Constanten in Gleichung $F(\overset{n}{s},x)=0$ algebraische Zahlen sind. In den erhaltenen n Ausdrücken wird ζ durch $(x-a)^{\frac{1}{N}}$ ersetzt, wobei man von einem der n Werthe dieser Grösse ausgeht. *Die n Ausdrücke setzen sich jetzt aus Integralen von $f_\varrho(s,x)=0$, die von $x-a$ abhängen, linear mit nichtverschwindenden Coefficienten zusammen und stellen die n Zweige von s aus $F(\overset{n}{s},x)=0$ dar.* Nimmt man dann in einem dieser Ausdrücke so viele Umgänge um $x=a$ vor, bis man auf denselben

Ausdruck zurückkommt, so sind alle auf diese Weise erhaltenen Zweige, da die Integrale linearunabhängig sind, von einander verschieden. Sie müssen daher ebensovielen der n Ausdrücke, welche die Zweige durch die Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ darstellen, gleich sein, und sind die in einem Windungspunkte zusammenhängenden Zweige, bezüglich hat man einen einwerthigen Zweig. Nun nimmt man mit einem der übrig gebliebenen Ausdrücke dasselbe Verfahren vor und hat in gleicher Weise fortzufahren. Dadurch erhält man also schliesslich direct die Darstellung der mehrwerthigen Functionen, welche die in Windungspunkten zusammenhängenden Zweige enthalten, sowie der einwerthigen Zweige durch die Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$.

9.

Es seien die Entwickelungen der Zweige von s und $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ nach Nr. 6, 7 und 8 durch die Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ dargestellt bei jedem Punkte x, in welchem $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, und bei $x = \infty$. Diese Punkte sollen als Punkte α bezeichnet werden. Die Entwickelungen der Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ bei einem Punkte α gelten nicht nur in dem Bezirke dieses Punktes in $f_\varrho = 0$, sondern auch jedenfalls innerhalb des Kreises um diesen Punkt als Mittelpunkt, der durch den nächsten Windungspunkt in $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ geht, da andere singuläre Punkte von $f_\varrho = 0$ in diesem Gebiete nur ausserwesentliche sind.

Um nun das Resultat der Fortsetzung der Function s von einem Punkte x auf beliebigem Wege zu einem anderen Punkte zu erhalten, dienen folgende Bemerkungen.

In dem Bezirke jedes Punktes α in der Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ sei ein nichtsingulärer Punkt β der Differentialgleichung angenommen. Die n Wurzeln der Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ in diesem Punkte β sind von einander verschieden, dieselben seien aufgestellt. Jeder der n Zweige s, deren Entwickelungen bei dem Punkte α dargestellt sind, wird in β einer der angegebenen Wurzeln gleich. Nun kann man nach Nr. 6 und 7 den Werth des Zweiges s in dem Punkte β mit *vorgeschriebener Annäherung berechnen und dadurch entscheiden, welche der n aufgestellten, von einander verschiedenen Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ dieser Werth ist.*

Nun werde durch die Punkte α eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie, welche alle n Blätter durchsetzt, gezogen. Man hat dann die beiden durch diese Linie getrennten Gebiete, in jedem dieser Gebiete bleibt s in dem einzelnen Blatte einwerthig. Eines dieser beiden Gebiete sei fixirt und in demselben werden die erhaltenen Entwickelungen der Zweige von s bei den Punkten α angenommen. Das Resultat des Umganges um einen Punkt α ist hier von vorn herein gegeben. In der Entwickelung der μ in einem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden Zweige geht $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ in $\omega^{\pm 1}(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ über, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ (das obere Vorzeichen entspricht dem Umgange in positiver, das untere dem in negativer Richtung), und der Zweig, dessen Entwickelung nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitet, in den, der $\omega^{\pm 1}(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ enthält. Um nun das Resultat der Fortsetzung eines Zweiges von s von einem Punkte α zu einem anderen Punkte α des fixirten Gebietes zu erkennen, wird in diesem Gebiete zu jedem Punkt α ein Punkt β der oben bezeichneten Art angenommen und der Werth jedes der n Zweige in β ermittelt. Die Werthe der Differentialquotienten eines Zweiges von s in β liefern die Gleichungen Nr. 1 (5.) etc. Man kann also, wenn ein System linearunabhängiger Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ bei dem nichtsingulären Punkte β aufgestellt ist, s_1 bis s_ϱ, so dass

$$\left| s_\mathfrak{a}, \frac{ds_\mathfrak{a}}{dx}, \ldots \frac{d^{\mathfrak{a}-2}s_\mathfrak{a}}{dx^{\mathfrak{a}-2}}, \frac{d^\mathfrak{a}s_\mathfrak{a}}{dx^\mathfrak{a}}, \ldots \frac{d^{\varrho-1}s_\mathfrak{a}}{dx^{\varrho-1}} \right|_{x=\beta} = 0, \quad \left| \frac{d^{\mathfrak{a}-1}s_\mathfrak{a}}{dx^{\mathfrak{a}-1}} \right|_{x=\beta} = (\mathfrak{a}-1)!$$

ist, unmittelbar den Zweig von s, der zu einer der n Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ in β gehört, durch diese Integrale ausdrücken. Nun kann man das Resultat der Fortsetzung eines bei einem nichtsingulären Punkte von $f_\varrho(s, x) = 0$ entwickelten Integrales zu einem anderen nichtsingulären Punkte in dem fixirten Gebiete mit *vorgeschriebener Annäherung berechnen* (Abh. des Verf. Bd. 91 Nr. 3 II. Nr. 4), ***und dadurch in Bezug auf jeden Zweig bei einem Punkte*** β_1 ***entscheiden, in welchen der Zweige, die zu den Wurzeln von*** $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ ***in einem Punkte*** β_2 ***gehören, derselbe übergeht.***

Wenn man nun einen Zweig bei irgend einem Punkte x, der nicht zu den Punkten α gehört, nach Nr. 7 durch die Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ dargestellt hat, so kann man, möge x nichtsingulärer oder ausserwesentlich singulärer Punkt von $f_\varrho = 0$ sein, in derselben Weise wie vorhin, das Resultat der Fortsetzung zu einem der Punkte β mit vorgeschriebener An-

näherung berechnen, demnach ersehen, welche der n Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ in β bei dieser Fortsetzung erhalten wird und ebenso umgekehrt, wenn man von einem Zweige bei β zu jenem Punkte x übergeht. Dann reducirt sich im Uebrigen die von einem Punkte auf einem beliebigen Wege zu bewerkstelligende Fortsetzung der Function zu einem anderen Punkte auf Zusammensetzungen von Umgängen um die Punkte α und Uebergängen von einem Punkte α zu einem anderen in dem fixirten Gebiete. Das Resultat einer beliebigen Fortsetzung wird daher auf die angegebene Weise erhalten.

Greifswald, den 24. April 1888.

Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf bei Hamburg.)

1.

Die Verallgemeinerung einer Formel des Herrn *Hermite* über eine Theileranzahl, welche ich im 100. Bande dieses Journals, S. 461 unter (3″.) mitgetheilt habe, lässt sich auf einem geometrischen Wege unmittelbar erkennen, der auch aus anderen Gründen vielleicht nicht ohne Interesse ist, und der gestattet, die Formel auf solche complexen Zahlen auszudehnen, die einer einfachen geometrischen Versinnlichung zugänglich sind, z. B. auf die Zahlen $a+bi$.

In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems besitzt nämlich das System der Punkte $x=m$, $y=m.n$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$ Eigenschaften, die eine auf die Theiler der natürlichen Zahlenreihe bezügliche Deutung zulassen. Diese Punkte, die kurz als Theilerpunkte bezeichnet werden mögen, liegen alle auf einem Strahlenbüschel, dessen Strahlen durch den Nullpunkt und je einen Punkt der Punktreihe $x=1$, $y=0$, ± 1, ± 2, ... hindurchgehen. Ein Strahl, der mit einem solchen Strahl parallel ist, soll im Anschluss an die *Gauss*schen „ganzen Punkte" ein „ganzer Strahl" genannt werden. Legt man nun durch den Punkt $0|l$ der y-Axe einen ganzen Strahl, z. B. parallel der x-Axe, so liegen auf demselben nur dann Theilerpunkte, wenn l eine ganze Zahl ist, und in diesem Falle so viele, wie l positive und negative Theiler besitzt. Die Abscissen dieser Punkte sind gleich den einzelnen Theilern. Aus dieser Fundamentaleigenschaft des Theilerpunktsystems lassen sich unmittelbar zahlreiche Folgerungen ziehen, von denen einige angedeutet werden mögen.

Bezeichnet man mit $y=\Phi(x)$ eine mit wachsendem x beständig abnehmende, eindeutige, stetige Function, die für $x=0$ positiv ist, und mit $\varphi(y)$ die inverse Function, so ergiebt die Abzählung der Theilerpunkte einmal in der Richtung der y-Axe, dann in der Richtung der x-Axe, die

Gleichung

$$(1.) \quad \Sigma\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] = \textit{Anzahl der positiven Theiler von } y, \textit{ die } \leqq \varphi(y) \textit{ sind},$$
$$(x = 1, 2, 3, \ldots, \Phi(x) \geqq 0;\; y = 1, 2, 3, \ldots)$$

welche mit der oben erwähnten Formel wesentlich übereinstimmt. Diese Formel selbst findet man bei der Annahme, dass $\Phi(x)$ eine beständig wachsende Function ist.

Das Reciprocitätsgesetz für das Zeichen $\left(\frac{p}{q}\right)$ kann man auf diese Weise leicht aus der a. a. O. gegebenen Umformung des *Gauss*schen Lemmas ableiten, wenn man die in Frage kommenden Theilerpunkte einerseits auf den Ordinaten, andererseits auf den durch den Nullpunkt gehenden ganzen Strahlen abzählt. Da der Beweis mit dem *Eisenstein*schen geometrischen Beweise grosse Aehnlichkeit besitzt, gehe ich nicht darauf ein.

Legt man durch irgend einen ganzen Punkt $a|b$ einen Büschel von ganzen Strahlen, so liegen auf demselben alle Theilerpunkte, die den Theilern der Form $ax+b$ entsprechen. Auf einem aus ganzen Strahlen bestehenden Büschel zweiter Ordnung, der die Parabel mit dem Scheitel $b|c$, dem Parameter $2a$ und einer mit der y-Axe parallelen Axe umhüllt, liegen alle Theiler der Form ax^2-bx+c; u. s. w. Viele zahlentheoretische Theoreme lassen sich auf diese Weise geometrisch aussprechen, wenn man nur neben den ganzen Punkten auch von ganzen Strahlen oder allgemeiner von rationalen Strahlen reden will; die letzteren kann man als solche Strahlen definiren, deren durch irgend einen ganzen Punkt gezogene Parallele durch einen zweiten und deshalb durch unendlich viele ganze Punkte hindurchgeht. Ohne hierbei zu verweilen, will ich nur erwähnen, wie diese Betrachtungen zu einer auf der geradlinigen Fortpflanzung der Lichtstrahlen beruhenden Lösung der Aufgabe führen, die Divisoren einer gegebenen Zahl zu bestimmen, einer Lösung, die allerdings nur für kleine Zahlen optisch realisirbar ist. Denkt man sich nämlich, dass ein im Nullpunkt befindliches Auge nur durch die Punkte $x=1$, $y=1, 2, 3, \ldots$ und $x=1, 2, 3, \ldots$, $y=l$ Lichtstrahlen von einer Lichtquelle empfangen könnte, welche die dem Auge abgewandte Seite der Ebene $y=l$ beleuchtet, so wird das Auge nur dann erleuchtete Punkte sehen, wenn l eine ganze Zahl ist, und zwar so viele, wie l positive Theiler besitzt. Ist $l=m.n$, so wird durch die Punktpaare $m|l$, $1|n$ und $n|l$, $1|m$ je ein Lichtstrahl das beobachtende Auge treffen.

Auf die Zahlen $a+bi$ lässt sich die Formel (1.) auf doppelte Weise

ausdehnen. Zuerst mögen die yz-Ebene und alle mit ihr parallelen Ebenen als Ebenen betrachtet werden, durch deren Punkte die complexen Zahlen dargestellt werden; die reelle Axe liege jedesmal in der Ebene $z=0$. Ist $\bar{x}$ der absolute Betrag einer ganzen complexen Zahl ξ, so werden in der Ebene $x=\bar{x}$ alle Punkte als Theilerpunkte gekennzeichnet, welche Zahlen darstellen, die durch ξ theilbar sind. Die Zahl $y+zi$ hat dann offenbar so viele Theiler, wie auf der durch den Punkt $0|y|z$ parallel mit der x-Axe gezogenen Geraden Theilerpunkte liegen. Es können natürlich, auch wenn man von je vier associirten Zahlen ξ nur eine berücksichtigt, mehrere Theilerpunkte zusammenfallen, deren jeder einmal gezählt werden muss. Ist $x=\varphi(y,z)$ eine für $y>0$, $z\overline{\gtrless}0$ eindeutige, stetige, mit wachsenden Argumenten beständig abnehmende, für $y=z=0$ positive Function, $\Phi(\bar{x})$ das von der Fläche $x=\varphi(y,z)$ $(y>0, z\overline{\gtrless}0)$ und der xz- und xy-Ebene begrenzte *) Stück der Ebene $x=\bar{x}$, und bezeichnet man mit $\left[\frac{\Phi(\bar{x})}{\xi}\right]$ die Anzahl der ganzen Zahlen, die innerhalb oder auf dem Rande des Bereiches $\frac{\Phi(\bar{x})}{\xi}$ liegen, so ergiebt sich durch doppelte Abzählung der Theilerpunkte, die innerhalb des von der Fläche $x=\varphi(y,z)$ $(y>0, z\overline{\gtrless}0)$ und den Coordinatenebenen begrenzten Raumes liegen,

$$(2.)\qquad \Sigma\left[\frac{\Phi(\bar{x})}{\xi}\right] = \textit{Anzahl der nicht associirten Theiler von } y+zi\textit{, deren absoluter Betrag } \overline{\overline{<}}\ \varphi(y,z) \textit{ ist.}$$

Die Summation ist über alle nicht associirten Zahlen ξ zu erstrecken, für welche der mit wachsendem $\bar{x}$ beständig kleiner werdende Bereich $\Phi(\bar{x})$ nicht verschwindet; von den associirten Theilern von $y+zi$ $(y=1,2,3,\ldots,$ $z=0,1,2,3,\ldots)$ ist je einer zu zählen.

2.

Um eine andere Verallgemeinerung der Formel (1.) abzuleiten, gehe ich wieder zu den Theilerpunkten der reellen Zahlen zurück. Dieselben lassen sich als Gitterpunkte betrachten, nämlich als die Schnittpunkte der durch den Nullpunkt gehenden ganzen Strahlen mit den durch die ganzen

*) Die Gerade $x=\bar{x}$, $z=0$ gehört mit zu dem Bereich $\Phi(\bar{x})$, die Gerade $x=\bar{x}$, $y=0$ dagegen nicht.

Punkte der x-Axe hindurchgehenden Strahlen des Parallelstrahlenbüschels, dessen Centrum in der Richtung der y-Axe in unendlicher Entfernung liegt. Als ein System von Gitterpunkten bezeichne ich die Gesammtheit der Schnittpunkte von je zwei solchen Strahlen zweier Strahlenbüschel, die durch eine Reihe von äquidistanten Punkten je einer bestimmten Punktreihe hindurchgehen. Diese Strahlen sollen Gitterstrahlen genannt werden.

Es ist für das Folgende zweckmässig, den auf einander folgenden Strahlen eines Strahlenbüschels je eine der auf einander folgenden reellen Zahlen zuzuordnen; ein Büschel von Gitterstrahlen repräsentirt dann alle ganzen positiven und negativen Zahlen, die Zahl ∞ wird dargestellt durch den mit der erwähnten Punktreihe parallelen Strahl, der die Null bedeutende Nullstrahl kann beliebig gewählt werden. Ist ξ eine Zahl des einen, η eine Zahl des anderen Büschels, und sind ξ und η durch eine Gleichung verbunden, so soll diese Gleichung als die Gleichung der Curve bezeichnet werden, auf der sich je zwei zusammengehörige Strahlen ξ und η schneiden. Ist z. B.

$$k.\xi + k'.\eta + \xi.\eta = l$$

oder für $k = k' = 0$

$$\xi.\eta = l,$$

so ist nach bekannten Principien die Curve ein Kegelschnitt, und wenn in dem letzteren Falle l eine ganze Zahl ist, so liegen auf diesem Kegelschnitt $2n$ Gitterpunkte, wenn $2n$ die Anzahl aller positiven und negativen Theiler von l ist, wobei auch 0 und ∞ als Theiler mitgezählt werden müssen, da $0.\infty = l$ gesetzt werden kann. Die Centren der Strahlenbüschel, durch welche der Kegelschnitt hindurchgeht, sind im Allgemeinen keine Gitterpunkte. Hierdurch ergiebt sich, beiläufig bemerkt, eine einfache Lösung der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu zeichnen, der durch $2n$ Gitterpunkte eines gegebenen Gitters, von denen einer gegeben ist, hindurchgeht. Man nehme nämlich eine Zahl l an, welche $2n$ Theiler (incl. 0 und ∞) besitzt, und bestimme die Nullstrahlen der beiden Strahlenbüschel so, dass der gegebene Gitterpunkt P der Schnittpunkt zweier Strahlen ξ und η ist, für welche $\xi.\eta = l$. Der durch die fünf Punkte: P, $0|\infty$, $\infty|0$ und die beiden Mittelpunkte der Strahlenbüschel bestimmte Kegelschnitt ist dann ein solcher, welcher die gestellte Bedingung erfüllt.

Wegen der besonderen Lage der beiden Strahlenbüschel, deren Gitterpunkte die Theilerpunkte sind, geht bei ihnen die Curve $\xi.\eta = l$ in eine Gerade über, die in gewöhnlichen Coordinaten die Gleichung $y = l$ hat.

Auch von diesem allgemeineren Standpunkte aus ist es leicht, zu den complexen Zahlen überzugehen. Die complexen Zahlen können, statt durch die Punkte einer Ebene, durch irgend eine andere zweistufige geometrische Mannigfaltigkeit repräsentirt werden, z. B. durch die Geraden einer Ebene, die Strahlen eines Strahlenbündels, die Ebenen eines Ebenenbündels u. s. w. So kann es zweckmässig sein, die Zahl $a+bi$ darzustellen durch die Gerade der Ebene, die in gewöhnlichen Coordinaten eine der Gleichungen $ax+by=1$ oder $ax-by=1$ oder $bx+ay=1$ hat; diese Darstellungen sind der üblichen reciprok. Bei der Darstellung durch die Strahlen eines Strahlenbündels scheint es am einfachsten, jedem Strahl diejenige complexe Zahl zuzuordnen, welche auch durch den Punkt einer bestimmten Ebene repräsentirt wird, durch den der Strahl hindurchgeht. Bei der Darstellung durch die Ebenen eines Ebenenbündels kann man, wie es im Folgenden geschehen soll, die Zahl $a+bi$ durch die Ebene versinnlichen, welche die Gleichung $ax-by=z$ oder die Gleichung $bx+ay=z$ hat. Man kann natürlich mehrere solche Darstellungen neben einander benutzen.

Ein Strahl des Parallelstrahlenbündels, dessen Centrum in der Richtung der z-Axe in unendlicher Entfernung liegt, repräsentire die Zahl $\xi=x+yi$, wenn derselbe durch den Punkt $x+yi$ der xy-Ebene hindurchgeht, $\eta=a+bi$ sei eine Zahl, die durch die Ebene $ax-by=z$ dargestellt wird. Durch eine Gleichung zwischen den complexen Veränderlichen ξ, η wird die Fläche definirt, auf welcher alle Schnittpunkte eines Strahles ξ mit der zugehörigen Ebene η liegen. So ist z. B., um nur den einfachsten Fall zu erwähnen, $\xi=\eta$ die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids, das in gewöhnlichen Coordinaten die Gleichung $x^2-y^2=z$ besitzt. Die Gleichung $\xi.\eta=c+di$ ist die Gleichung der Ebene $z=c$, wie sich sofort ergiebt, wenn man aus

$$ax-by = z,$$

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

a und b dadurch eliminirt, dass man die Werthe von x und y in die erste Gleichung einsetzt. Auf der Ebene $z=c$ liegen also alle Schnittpunkte einer Zahl ξ mit einer Zahl η, deren Product den reellen Bestandtheil c hat. Sind a, b, x, y ganze Zahlen, so sollen diese Schnittpunkte, die mit Gitterpunkten des räumlichen rechtwinkligen Gitters (das Wort in dem gewöhnlichen Sinne genommen) zusammenfallen, Theilerpunkte erster Art

heissen. Mit jedem Gitterpunkt fallen entweder gar keine oder unendlich viele Theilerpunkte zusammen; der erstere Fall tritt ein, wenn die Coordinaten x, y des Gitterpunktes einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der nicht in der Coordinate z aufgeht. Ist $\eta' = a+bi$ eine durch die Ebene $bx+ay = z$ dargestellte complexe Zahl und behält $\xi = x+yi$ seine vorige Bedeutung, so ist $\xi.\eta' = c+di$ die Gleichung der Ebene $z = d$, auf welcher also die Schnittpunkte aller Zahlen ξ und η' liegen, deren Product den imaginären Bestandtheil di besitzt; diese Schnittpunkte heissen, wenn ξ und η' ganze Zahlen sind, Theilerpunkte zweiter Art. Die Zahl $\bar{z}+\bar{z}'i$ hat mithin den Theiler $x+yi$, wenn im Schnittpunkte der im Punkte $x|y|0$ auf der xy-Ebene errichteten Senkrechten mit der Ebene $z = \bar{z}$ ein Theilerpunkt erster Art, im Schnittpunkt derselben Senkrechten mit der Ebene $z = \bar{z}'$ ein Theilerpunkt zweiter Art liegt. Ist also $z = \varphi(x, y)$ eine Fläche, welche, abgesehen davon, dass jetzt die Argumente andere sind, dieselben Bedingungen erfüllt, wie die früher so bezeichnete, hat ferner auch $\Phi(\bar{z})$ die analoge Bedeutung wie früher $\Phi(\bar{x})$, und bezeichnet man die Anzahl der positiven und negativen Zahlen a, b, die nicht beide $= 0$ sind und die Bedingungen

$$0 \leqq ax-by \leqq \varphi(x, y),$$
$$0 \leqq ay+bx \leqq \varphi(x, y)$$

erfüllen, mit $\left[\frac{q(x, y)}{x, y}\right]$, so ist, wie sich durch doppelte Abzählung der Theilerpunktpaare ergiebt,

(3.) $\Sigma\left[\frac{\varphi(x, y)}{x, y}\right] =$ *Anzahl der nicht associirten Theiler von* $\bar{z}+\bar{z}'i$, *die zugleich innerhalb oder auf dem Rande der beiden Bereiche* $\Phi(\bar{z})$ *und* $\Phi(\bar{z}')$ *liegen.*

$(x = 1, 2, 3, \ldots, y = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, $(\bar{z}, \bar{z}' = 0, 1, 2, 3, \ldots; \bar{z}, \bar{z}'$ nicht zugleich $= 0)$.

Auch diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Formel (1.); für $y = b = \bar{z}' = 0$ geht sie, abgesehen davon, dass Φ und φ vertauscht sind, in (1.) über.

Bergedorf, Juni 1887.

Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

In diesem Aufsatze beschäftige ich mich mit den von Herrn *Brill* entdeckten Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven R_n $n$ter Ordnung in einem Raume von p Dimensionen *). Eine solche Involution ist $n$ter Ordnung und $(n-p-1)$ter Stufe, ihre Eigenschaften enthalten diejenigen der Curve vollständig.

Ist nun $2p \geqq n-1$, so giebt es ein zur Curve covariantes Gebilde von $(n-p-1)$ Dimensionen und $(2p-n+2)$ter Ordnung, auf welches sich die Fundamentalinvolution naturgemäss derart überträgt, dass jeder Punkt des Gebildes nur einer Gruppe angehört.

Für den Fall $n-p=2$ ergeben sich doppelt unendlich viele Gebilde $(p-1)$ter Dimension zweiter Ordnung, welche eine Schaarschaar bilden, und deren Theorie diejenige der Curve enthält.

Ich werde mich hier nur an die Fälle halten, welche der Anschauung unmittelbar zugänglich sind; also im Raume von zwei Dimensionen die Curven dritter bis fünfter Ordnung, in dem Raume von drei Dimensionen diejenigen vierter bis siebenter Ordnung betrachten. Die Fundamentalinvolution wird bekanntlich durch diejenigen Punktgruppen der Curve erhalten, welche allen Schnitten ebener Räume von $(p-1)$ Dimensionen apolar sind; man kann sie aber mehr geometrisch durch die Osculantentheorie **) ableiten, und dieser Weg führt zu den interessantesten Eigenschaften der Curve, er giebt das Gebilde $(n-p-1)$ter Dimension, auf welchem

---

*) *Brill*, über binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. Math. Ann. Bd. 20, S. 335.

**) Ueber die Bildung der Osculanten vergl. *Study*, Ueber die Raumcurve vierter Ordnung. Sitzungsberichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. 1886; und *Jolles*, Theorie der Osculanten. Habilitationsschrift Aachen 1886.

sich die Involution abbildet, sofort an. Ich werde deshalb der letzteren Ableitung meist den Vorzug geben.

Für $n-p-1=0$ reducirt sich die Involution auf eine einzige Gruppe, aber unter Hinzunahme eines beliebigen Punktes ist eine Involution erster Stufe bestimmt, welche Veranlassung zur Construction interessanter, der R_n beigeordneter Curven oder Flächen giebt. So erhält man für $n=4$ die desmischen Flächen, für $n=3$ die der Evolute eines Kegelschnittes collinearen Curven.

§ 1.

Die ebene rationale Curve dritter Ordnung.

Die ersten Osculanten einer kubischen Raumcurve ϱ_3 sind die von den Axen derselben eingehüllten Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen von ϱ_3, die zweiten Osculanten sind die Axen selbst. Durch Centralprojection auf eine Ebene geht aus ϱ_3 eine ebene Curve R_3, aus den ersten Osculanten gehen die Kegelschnitte hervor, welche dem Wendedreiecke von R_3 einbeschrieben sind und die R_3 berühren. Durch die Tangenten von R_3 sind diese Kegelschnitte projectiv auf einander bezogen und bestimmen dadurch eine Reihe von collinearen Punktfeldern, welche das Wendedreieck als sich selbst entsprechend haben und für welche der Ort der einem beliebigen Punkte entsprechenden Punkte eine Gerade ist. Nehmen wir jetzt in der Ebene von R_3 einen beliebigen Punkt Z hinzu, so kann man durch ihn an irgend eine erste Osculante zwei Tangenten legen, von welchen jede noch eine andere erste Osculante berührt. Die letzteren beiden haben nun ebenfalls eine durch Z gehende gemeinsame Tangente. Auf diese Weise sind nicht nur die Strahlen des Büschels Z zu Tripeln einer kubischen Involution geordnet, sondern letztere überträgt sich auch auf die Osculantenschaar und damit auf die Punkte von R_3, wenn wir jedem Strahle des Büschels Z diejenige Osculante zuordnen, welche die mit diesem Strahle ein Tripel bildenden Strahlen berührt. Die drei von Z nach den Ecken des Wendedreiecks gelegten Geraden bilden stets ein Tripel der Involution.

Da die ersten Osculanten perspectiv zu den Tangenten von R_3 liegen, so ist hierdurch die kubische Involution auch auf alle Osculanten übertragbar. Die Tangententripel einer Osculante R_2 bilden Dreiecke, welche einem zweiten Kegelschnitte T_2, der nun eine kubische Punktinvolution trägt, einbeschrieben sind. Alle Curven T_2 bilden einen Büschel, dessen Grundpunkte

Z und die Ecken des Wendedreiecks sind. Die Involutionen auf den T_2 werden durch den involutorischen Büschel Z ausgeschnitten.

Jede R_2 ist polarreciprok zu ihrer entsprechenden T_2. In den Ordnungscurven dieser polaren Beziehungen erhalten wir einfach unendlich viele Kegelschnitte F_2 mit einem gemeinsamen Poldreieck, nämlich dem Wendedreiecke. Diese F_2 sind nun derart auf die Tangenten von R_3 bezogen, dass die Polaren des Punktes Z bezüglich der Curven F_2 die diesen entsprechenden Tangenten von R_3 sind. Damit ist eine Transformation des Curvennetzes, welchem die F_2 angehören, auf das Geradenfeld der Ebene gegeben, so dass jedem Punkte des letzteren vier in Bezug auf das Wendedreieck symmetrisch gelegene Punkte zugewiesen sind. Die Kegelschnitte F_2 umhüllen eine Curve R'_6, welcher R_3 entspricht. Da die F_2 in den oben genannten Collineationen einander zugeordnet sind, so liegen entsprechende Punkte derselben je auf einer Geraden, welche ebenfalls Tangente von R'_6 ist und in der Transformation einer ersten Osculante von R_3 entspricht. R'_6 ist vierter Klasse und sechster Ordnung. Aus den Singularitäten von R_3 folgen diejenigen von R'_6. Letztere Curve hat deshalb sechs Spitzen, deren Tangenten paarweise in die Seiten des Wendedreiecks fallen, und vier Doppelpunkte. Sie ist der Evolute eines Kegelschnittes collinear verwandt.

Zu jedem Punkte Z der Ebene gehört eine der R_3 beigeordnete Curve R'_6.

§ 2.

Die rationale Raumcurve vierter Ordnung.

Für die Raumcurve R_4 ist nur ein Quadrupel, nämlich dasjenige seiner vier stationären Ebenen von Wichtigkeit. Bei Hinzunahme eines beliebigen Punktes Z des Raumes *) ist auf R_4 eine biquadratische Involution erster Stufe bestimmt, welcher stets das zuerst genannte Quadrupel angehört. Die ersten Osculanten von R_4 sind kubische Raumcurven R_3, welche perspectiv zu den Tangenten von R_4 liegen und dadurch einfach unendlich viele collineare Räume bestimmen, in welchen die vier stationären Ebenen von R_4 sich selbst entsprechen. Die Involution von R_4 überträgt sich durch deren Tangenten auf die R_3.

Die Tetraeder, deren Ebenen eine R_3 in den Punkten eines Qua-

*) Vergl. *Study* a. a. O.

drupels osculiren, sind einer zweiten durch Z gehenden kubischen Raumcurve T_3 einbeschrieben und Poltetraeder einer Fläche zweiter Ordnung F_2. Das System der F_2, welche in den Collineationen einander entsprechen, ist auch dadurch bestimmt, dass alle F_2 das Tetraeder der stationären Ebenen von R_4 zum Poltetraeder haben und dem Punkte Z die Schmiegungsebenen von R_4 als Polarebenen zugewiesen sind. Die Eingehüllte der F_2 ist eine desmische Fläche Ψ vierter Klasse, welche collinear verwandt ist der Centrafläche einer Fläche zweiten Grades *). So gehört also zu jedem Punkte Z des Raumes eine der R_4 beigeordnete Fläche Ψ.

Ueber die analytische Behandlung der R_4 will ich hier nur folgende Bemerkungen machen.

Für $i = 1, 2, 3, 4$ seien die homogenen Coordinaten von R_4 in folgender Weise durch einen Parameter λ ausgedrückt:

$$(1.)\qquad \varrho x_i = a_i+4b_i\lambda+6c_i\lambda^2+4d_i\lambda^3+e_i\lambda^4$$

oder homogen:

$$\varrho x_i = f_i(\lambda, \mu).$$

Die Parameterdarstellung für eine Osculante wird aus derjenigen der gegebenen Curve nun dadurch erhalten, dass man für beliebig anzunehmende constante Parameterwerthe λ_1, μ_1 die Polaren bezüglich der Functionen $f_i(\lambda, \mu)$ bildet und sie proportional den Coordinaten x'_i der Osculante setzt **). Man kann so erste, zweite, ... Osculanten, zweite, dritte, ... gemischte Osculanten aufstellen, ebenso wie in der Polarentheorie die ersten, zweiten, ... und gemischten Polaren betrachtet werden.

Die erste Osculante $R_3^{(\lambda_1)}$ für den Punkt λ_1 von R_4 hat somit die Coordinaten:

$$\varrho x'_i = \tfrac{1}{4}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial \mu}\mu_1+\frac{\partial f_i}{\partial \lambda}\lambda_1\Big)$$

oder:

$$(2.)\qquad \varrho x'_i = (a_i+b_i\lambda_1)+3(b_i+c_i\lambda_1)\lambda+3(c_i+d_i\lambda_1)\lambda^2+(d_i+e_i\lambda_1)\lambda^3.$$

$R_3^{(\lambda_1)}$ hat in dem Punkte λ_1 mit R_4 einen Punkt, die Tangente und die Schmiegungsebene gemein und liegt perspectiv zu den Tangenten von R_4. In dem Punkte λ_1 von R_4, in welchem eine stationäre Ebene diese Curve osculirt,

---

*) Vergl. die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art etc. Dieses Journal, Bd. 101, S. 73.

**) Vergl. *Jolles* a. a. O.

hat auch $R_3^{(\lambda_1)}$ eine stationäre Ebene und ist deshalb eine ebene Curve. Es folgt deshalb als Gleichung für die Parameterwerthe der stationären Ebenen von R_4:

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1\lambda & b_1+c_1\lambda & c_1+d_1\lambda & d_1+e_1\lambda \\ a_2+b_2\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4+b_4\lambda & \cdot & \cdot & d_4+e_4\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Gleichung einer stationären Ebene von R_4 zu erhalten, bilden wir die zweite Osculante $R_2^{(\lambda_1^2)}$ für einen Punkt λ_1, dessen Parameter Wurzel von (3.) ist. Die Ebene von $R_2^{(\lambda_1^2)}$ ist stationäre Ebene von R_4. Die Coordinaten von $R_2^{(\lambda_1^2)}$ sind dargestellt durch:

$$\varrho x_i'' = \frac{1}{4.3}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial\mu^2}\mu_1^2+2\frac{\partial^2 f_i}{\partial\mu\partial\lambda}\mu_1\lambda_1+\frac{\partial^2 f_i}{\partial\lambda^2}\lambda_1^2\right),$$

und es folgt daher die Gleichung der Ebene von $R_2^{(\lambda_1^2)}$ in:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1+2b_1\lambda_1+c_1\lambda_1^2 & b_1+2c_1\lambda_1+d_1\lambda_1^2 & c_1+2d_1\lambda_1+e_1\lambda_1^2 \\ x_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 & a_4+2b_4\lambda_1+c_4\lambda_1^2 & \cdot & c_4+2d_4\lambda_1+e_4\lambda_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir für λ_1 wieder λ und schreiben diese Gleichung:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = 0,$$

so folgen unter Berücksichtigung von (3.) die Beziehungen:

$$(4.)\quad a+b\lambda = 0,\quad b+c\lambda = 0,\quad c+d\lambda = 0,\quad d+e\lambda = 0\ ^{*)}.$$

Wir bemerken noch, dass die Coordinaten der Schmiegungsebenen aller ersten Osculanten $R_3^{(\lambda_1)}$ von R_4 der Gleichung genügen:

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

und dass die durch diese Gleichung dargestellte Fläche dritter Klasse die *Steiner*sche Fläche ist, für welche R_4 Haupttangentencurve ist. Auf ihr liegen alle (nicht gemischten) zweiten Osculanten von R_4.

---

*) Wir setzen zur Abkürzung $\Sigma_i a_i u_i = a$ oder (au) etc.

§ 3^a.

Die rationale Raumcurve fünfter Ordnung und ihre Abbildung auf die kubische Raumcurve K_3.

Für den Fall $n-p=2$ erhalten wir, wenn $p=2$ ist, die rationale ebene Curve vierter Ordnung, welche ich in einem früheren Aufsatze ausführlich betrachtet habe *). Ist $p=3$, so erhalten wir die rationale Raumcurve fünfter Ordnung R_5, mit welcher wir uns hier beschäftigen wollen.

Die Coordinaten von R_5 seien durch einen Parameter λ ausgedrückt in:

$$(1.)\qquad \varrho x_i = a_i+5b_i\lambda+10c_i\lambda^2+10d_i\lambda^3+5e_i\lambda^4+f_i\lambda^5.$$

Für die erste Osculante $R_4^{(\lambda_1)}$ in λ_1 ergiebt sich dann:

$$\varrho x_i' = (a_i+b_i\lambda_1)+4(b_i+c_i\lambda_1)\lambda+\cdots+(e_i+f_i\lambda_1)\lambda^4.$$

Wird $R_4^{(\lambda_1)}$ in dem Punkte $\lambda=\lambda_2$ von einer stationären Ebene osculirt, so folgt nach § 2, (3.) für λ_2 die Gleichung:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} a_1+b_1(\lambda_1+\lambda_2)+c_1\lambda_1\lambda_2, & b_1+c_1(\lambda_1+\lambda_2)+d_1\lambda_1\lambda_2, & \dots & d_1+e_1(\lambda_1+\lambda_2)+f_1\lambda_1\lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4+b_4(\lambda_1+\lambda_2)+c_4\lambda_1\lambda_2, & \cdot & \cdot & d_4+e_4(\lambda_1+\lambda_2)+f_4\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Für $\lambda_1=\lambda_2$ folgt hieraus die Gleichung für die Parameter der acht stationären Ebenen von R_5.

Ist $u_1x_1+\cdots+u_4x_4=0$ die Gleichung einer stationären Ebene von $R_4^{(\lambda_1)}$, so folgt nach § 2, (4.):

$$(3.)\qquad \begin{cases} a+(\lambda_1+\lambda_2)b+\lambda_1\lambda_2 c = 0, \\ b+(\lambda_1+\lambda_2)c+\lambda_1\lambda_2 d = 0, \\ c+(\lambda_1+\lambda_2)d+\lambda_1\lambda_2 e = 0, \\ d+(\lambda_1+\lambda_2)e+\lambda_1\lambda_2 f = 0. \end{cases}$$

Sind λ_3, λ_4, λ_5 die drei anderen Wurzeln von (2.), so leiten wir aus (3.) folgende Gleichungen ab:

$$(4.)\qquad \begin{cases} a+b\sum_1^3{}_\alpha\lambda_\alpha+c\sum_1^3{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+d\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \\ b+c\sum_1^3{}_\alpha\lambda_\alpha+d\sum_1^3{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+e\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \\ c+d\sum_1^3{}_\alpha\lambda_\alpha+e\sum_1^3{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+f\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

*) Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. Dieses Journal, Bd. 101, S. 300.

ferner:

$$(5.)\quad \begin{cases} a+b\sum_1^4{}_\alpha\lambda_\alpha+c\sum_1^4{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+d\sum_1^4{}_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0, \\ b+c\sum_1^4{}_\alpha\lambda_\alpha+d\sum_1^4{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+e\sum_1^4{}_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+f\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

und endlich:

$$a+b\sum_1^5{}_\alpha\lambda_\alpha+c\sum_1^5{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+d\sum_1^5{}_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+e\sum_1^5{}_{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta+f\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Identität, da die vier stationären Ebenen von $R_4^{(\lambda_1)}$ nicht durch denselben Punkt gehen. Die fünf Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_5$ sind demnach Wurzeln einer Gleichung fünften Grades:

$$(6.)\quad A\lambda^5+B\lambda^4+C\lambda^3+D\lambda^2+E\lambda+F = 0,$$

zwischen deren Coefficienten vier homogene lineare Gleichungen bestehen, und zwar:

$$(7.)\quad a_iA-b_iB+c_iC-d_iD+e_iE-f_iF = 0.$$

Die fünf der Gleichung (6.) genügenden Werthe von λ_1 bestimmen die Quintupel der auf R_5 befindlichen fundamentalen Involution J_5 fünfter Ordnung erster Stufe, deren acht Doppelelemente den stationären Ebenen von R_5 entsprechen.

Die ersten Osculanten $R_4^{(\lambda_1)}$ und $R_4^{(\lambda_2)}$ haben eine gemeinsame stationäre Ebene, welche durch (3.) bestimmt ist; von den drei Osculanten $R_4^{(\lambda_1)}$, $R_4^{(\lambda_2)}$, $R_4^{(\lambda_3)}$ haben je zwei eine gemeinsame stationäre Ebene, welche die durch (4.) bestimmte Gerade enthält, etc.

Die fünf Osculanten $R_4^{(\lambda_1)}, \dots R_4^{(\lambda_5)}$ haben im Ganzen zehn stationäre Ebenen, welche die Seitenflächen eines vollständigen Fünfecks sind. Jedem Eckpunkte desselben ist derjenige Punkt λ_α von R_5 zugewiesen, dessen erste Osculante keine durch den Eckpunkt gehende stationäre Ebene besitzt. Wir wollen die Coordinaten X_i jenes Eckpunktes durch den Parameter λ_α ausdrücken. Nach (5.) haben wir für X_i zwei Darstellungen, nämlich:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho X_i = a_i+b_i\sum_2^5{}_\alpha\lambda_\alpha+\cdots+e_i\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5, \\ \sigma X_i = b_i+c_i\sum_2^5{}_\alpha\lambda_\alpha+\cdots+f_i\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5, \\ \qquad \text{wobei } \varrho+\lambda_1\sigma = 0. \end{cases}$$

Die symmetrischen Functionen der Grössen $\lambda_2, \dots, \lambda_5$, welche hier auftreten, drücken wir aus durch die Coefficienten der Gleichung (2.) und finden,

wenn statt λ_1 wieder λ gesetzt wird:

$$(9^a.)\qquad \tau X_i = \alpha_i + 3\beta_i\lambda + 3\gamma_i\lambda^2 + \delta_i\lambda^3,$$

wobei:

$$(9^b.)\qquad \begin{cases} \alpha_i = -b_i[bcde]+c_i[acde]-d_i[abde]+e_i[abce]-f_i[abcd], \\ 3\beta_i = -b_i[bcdf]+c_i\{[bcde]+[acdf]\}-d_i\{[acde]+[abdf]\} \\ \qquad\qquad +e_i\{[abde]+[abcf]\}-f_i[abce], \\ 3\gamma_i = a_i[bdef]-b_i\{[bcef]+[adef]\}+c_i\{[bcdf]+[acef]\} \\ \qquad\qquad -d_i\{[bcde]+[acdf]\}+e_i[acde], \\ \delta_i = a_i[cdef]-b_i[bdef]+c_i[bcef]-d_i[bcdf]+e_i[bcde]. \end{cases}$$

Der Punkt X liegt demnach auf einer Raumcurve K_3 dritter Ordnung, welcher alle oben genannten vollständigen Fünfecke einbeschrieben sind. K_3 ist durch den Parameter λ projectiv auf R_5 bezogen.

Aus (8.) erhält man auch die Gleichungen von K_3 durch Nullsetzen aller Determinanten der Matrix:

$$(9^c.)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ebenen der Fünfecke oder die stationären Ebenen aller $R_4^{(\lambda)}$ bilden einen Büschel sechster Ordnung, dessen Gleichungen durch das Verschwinden aller Determinanten der Matrix

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt werden. Dieser Ebenenbüschel berührt somit alle *Steiner*schen Flächen, für welche die $R_4^{(\lambda)}$ Haupttangentencurven sind.

Die kubische Curve K_3 liegt in einer Ebene, wenn $[\alpha\beta\gamma\delta]=0$ ist. Ist aber R_5 keine ebene Curve, so muss in diesem Falle K_3 zerfallen in einen Kegelschnitt und eine Gerade. Ersterer trägt eine Involution vierter Ordnung erster Stufe, während die Gerade der Ort des fünften Punktes

aller Quintupel ist. Alle Quintupel von J_5 auf R_5 haben einen Punkt gemein, dessen Schmiegungsebene fünf unendlich nahe Punkte von R_5 enthält. Die erste Osculante für diesen Punkt ist eine ebene Curve vierter Ordnung, dessen Kegelschnitt K*) Bestandtheil von K_3 ist. Hat R_5 zwei solcher Punkte, so besteht K_3 aus drei Geraden, von welchen die eine Schnittgerade der bezüglichen Schmiegungsebenen ist und die Involution dritter Ordnung trägt, auf welche sich in diesem Falle J_5 reducirt.

§ 3^b.

Die Beziehung zwischen R_5 und K_3 vermittelt durch eine Flächenschaarschaar zweiter Klasse.

Durch Vermittlung der projectiven Beziehung zwischen K_3 und R_5 ist K_3 zu allen Osculanten von R_5 projectiv. Wir betrachten insbesondere die zweiten gemischten Osculanten $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$ dritter Ordnung. Die projective Beziehung zwischen K_3 und $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$ giebt eine reciproke Raumtransformation, welche polar sein muss, weil $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$ den beiden Tetraedern stationärer Ebenen der ersten Osculanten $R_4^{(\lambda')}$ und $R_4^{(\lambda'')}$ einbeschrieben ist und stets einem Eckpunkt eines solchen Tetraeders die gegenüberstehende Seitenfläche desselben zugewiesen ist. Für die Curve $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$ haben wir die Parameterdarstellung:

$$\varrho x_i = (a_i+b_i(\lambda'+\lambda'')+c_i\lambda'\lambda'')+3\lambda(b_i+c_i(\lambda'+\lambda'')+d_i\lambda'\lambda'')$$
$$+3\lambda^2(c_i+d_i(\lambda'+\lambda'')+e_i\lambda'\lambda'')+\lambda^3(d_i+e_i(\lambda'+\lambda'')+f_i\lambda'\lambda''),$$

für K_3:

$$\tau X_i = \alpha_i+3\beta_i\lambda+3\gamma_i\lambda^2+\delta_i\lambda^3.$$

Ist nun u die Schmiegungsebene von K_3 in dem Punkte λ, so folgt:

$$(\alpha u) = -\lambda^3;\quad (\beta u) = \lambda^2;\quad (\gamma u) = -\lambda;\quad (\delta u) = 1.$$

Demnach:

$$(11.)\quad \begin{cases} \varrho x_i = (\delta u)(a_i+b_i(\lambda'+\lambda'')+c_i\lambda'\lambda'')-3(\gamma u)(b_i+c_i(\lambda'+\lambda'')+d_i\lambda'\lambda'') \\ \qquad +3(\beta u)(c_i+d_i(\lambda'+\lambda'')+e_i\lambda'\lambda'')-(\alpha u)(d_i+e_i(\lambda'+\lambda'')+f_i\lambda'\lambda''). \end{cases}$$

Sind u und u' conjugirte Ebenen des Polarsystems, in welchem K_3 und $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$ einander entsprechen, so folgt aus (11.):

$$(12.)\quad \begin{cases} (\delta u)\{(au')+(bu')(\lambda'+\lambda'')+(cu')\lambda'\lambda''\} \\ -3(\gamma u)\{(bu')+(cu')(\lambda'+\lambda'')+(du')\lambda'\lambda''\} \\ +3(\beta u)\{(cu')+(du')(\lambda'+\lambda'')+(eu')\lambda'\lambda''\} \\ -(\alpha u)\{(du')+(eu')(\lambda'+\lambda'')+(fu')\lambda'\lambda''\} = 0. \end{cases}$$

*) Vergl. dieses Journal, Bd. 101, S. 304.

Da durch Vertauschung von u mit u' diese Gleichung sich nicht ändern darf, auch wenn λ' und λ'' ganz beliebige Werthe haben, so gelten die Relationen:

$$(13.)\quad \begin{cases}[a_\mu \delta_\nu]-3[b_\mu \gamma_\nu]+3[c_\mu \beta_\nu]-[d_\mu \alpha_\nu] = 0,\\ [b_\mu \delta_\nu]-3[c_\mu \gamma_\nu]+3[d_\mu \beta_\nu]-[e_\mu \alpha_\nu] = 0,\\ [c_\mu \delta_\nu]-3[d_\mu \gamma_\nu]+3[e_\mu \beta_\nu]-[f_\mu \alpha_\nu] = 0,\end{cases}$$

welche auch direct verificirt werden können.

Für die Gleichung der Ordnungsfläche $f_2^{(\lambda'\lambda'')}$ folgt aus (12.), wenn wir u gleich u' setzen:

$$(14.)\quad \begin{cases}\quad \{(au)(\delta u)-3(bu)(\gamma u)+3(cu)(\beta u)-(du)(\alpha u)\}\\ +(\lambda'+\lambda'')\{(bu)(\delta u)-3(cu)(\gamma u)+3(du)(\beta u)-(eu)(\alpha u)\}\\ \quad +\lambda'\lambda''\{(cu)(\delta u)-3(du)(\gamma u)+3(eu)(\beta u)-(fu)(\alpha u)\} = 0.\end{cases}$$

Die doppelt unendlich vielen Flächen $f_2^{(\lambda'\lambda'')}$ bilden somit eine Schaarschaar von besonderer Art, welche unendlich viele der Curve K_3 einbeschriebene Polfünfecke besitzt. Jedes Quintupel der auf K_3 befindlichen Fundamentalinvolution liefert ein solches*). Die Schaarschaar ist auch derart specialisirt, dass sie aus den ersten Polaren aller Ebenen eines Bündels bezüglich ∞^3 Flächen dritter Klasse besteht; der Mittelpunkt eines solchen Bündels ist ein beliebiger Punkt von K_3 und das *Sylvester*sche Fünfeck irgend ein Quintupel von K_3**).

Die Schaarschaar der $f_2^{(\lambda'\lambda'')}$ bestimmt nun rückwärts die R_5 und alle ihre Osculanten. Sind u und u' zwei bezüglich der Schaarschaar conjugirte Ebenen, so folgen aus (12.) die Beziehungen:

$$(15.)\quad \begin{cases}(au)(\delta u')-3(bu)(\gamma u')+3(cu)(\beta u')-(du)(\alpha u') = 0,\\ (bu)(\delta u')-3(cu)(\gamma u')+3(du)(\beta u')-(eu)(\alpha u') = 0,\\ (cu)(\delta u')-3(du)(\gamma u')+3(eu)(\beta u')-(fu)(\alpha u') = 0.\end{cases}$$

Die Ebene u' möge K_3 in Punkten schneiden, welchen die Parameterwerthe λ', λ'', λ''' zukommen, dann ist:

---

*) Vergl. *Reye*, Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme. Dieses Journal, Bd. 78, S. 269.

**) Vergl. *Schur*, Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen. Math. Ann., Bd. 18, S. 23, und *Toeplitz*, über ein Flächennetz zweiter Ordnung. Math. Ann., Bd. 11, S. 434.

$-(\alpha u') = \lambda'\lambda''\lambda'''$; $3(\beta u') = \lambda'\lambda''+\lambda''\lambda'''+\lambda'''\lambda'$; $-3(\gamma u') = \lambda'+\lambda''+\lambda'''$; $(\delta u') = 1$.
Setzen wir diese Werthe in (15.) ein, so ergiebt sich, dass u die Ebene der dritten gemischten Osculante $R_2^{(\lambda'\lambda''\lambda''')}$ zweiter Ordnung von R_5 ist. Diese $R_2^{(\lambda'\lambda''\lambda''')}$ ist aber gemeinschaftliche erste Osculante der drei zweiten gemischten Osculanten $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$, $R_3^{(\lambda''\lambda''')}$ und $R_3^{(\lambda'''\lambda')}$ von R_5. Hieraus ergeben sich nun folgende Sätze:

Dreht sich u' um eine Sehne von K_3, welche die Punkte λ' und λ'' dieser Curve enthält, so beschreibt u die Schmiegungsebenen der zweiten gemischten Osculante $R_3^{(\lambda'\lambda'')}$; dreht sich u' um eine Tangente von K_3, so beschreibt u die Schmiegungsebenen einer zweiten Osculante von R_5. Ist u' Tangentialebene des Kegels zweiter Ordnung, durch welchen K_3 von ihrem Punkte λ projicirt wird, so ist u Schmiegungsebene der ersten Osculante $R_4^{(\lambda)}$ von R_5. Beschreibt u' die Schmiegungsebenen von K_3, so beschreibt u die Schmiegungsebenen von R_5. Beschreibt u' einen Ebenenbündel um den Punkt λ von K_3, so bewegt sich u als Tangentialebene der *Steiner*schen Fläche, für welche $R_4^{(\lambda)}$ Haupttangentencurve ist.

Bewegt sich die Ebene u' derart, dass sie stets zwei unendlich nahe Punkte von K_3 enthält, so beschreibt u die Schmiegungsebenen aller ersten und zweiten (nicht gemischten) Osculanten von R_5 und daher als Tangentialebene eine Fläche Ψ_{12} zwölfter Klasse, auf welcher zwei einfache Curvenschaaren liegen. Eine Curve der ersten Schaar ist der Ort der Berührungspunkte der Schmiegungsebenen einer ersten Osculante und deshalb eine zweite (nicht gemischte) Osculante, eine Curve der zweiten Schaar ist der Ort der Berührungspunkte der Schmiegungsebenen einer zweiten Osculante und deshalb eine dritte (nicht gemischte) Osculante von R_5. Die Tangenten aller $R_3^{(\lambda^2)}$ sind Doppeltangenten von Ψ_{12}. Die *Steiner*schen Flächen, für welche die $R_4^{(\lambda)}$ Haupttangentencurven sind, berühren Ψ_{12} längs den Kegelschnitten $R_2^{(\lambda^3)}$. Eine Parameterdarstellung für die Punkte von Ψ_{12} ist deshalb gegeben durch:

$$(16.)\quad \begin{cases} \varrho x_i'' = (a_i+2b_i\lambda'+c_i\lambda'^2)+3(b_i+2c_i\lambda'+d_i\lambda'^2)\lambda'' \\ \quad +3(c_i+2d_i\lambda'+e_i\lambda'^2)\lambda''^2+(d_i+2e_i\lambda'+f_i\lambda'^2)\lambda''^3. \end{cases}$$

Die Gleichung von Ψ_{12} in Ebenencoordinaten findet man aber nach (15.). wenn man in die Discriminante der in λ kubischen Gleichung:

$$(\alpha u')+3(\beta u')\lambda+3(\gamma u')\lambda^2+(\delta u')\lambda^3 = 0$$

die Ausdrücke einsetzt:

$$(\delta u') = \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}; \quad 3(\gamma u') = \begin{vmatrix} a & c & d \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix};$$

$$3(\beta u') = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ c & d & f \end{vmatrix}; \quad (\alpha u') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Die linke Seite der Gleichung $\Psi_{12}(u) = 0$ ist eine Invariante zwölften Grades der Form fünfter Ordnung in λ:

$$(au)+5(bu)\lambda+10(cu)\lambda^2+10(du)\lambda^3+5(eu)\lambda^4+(fu)\lambda^5.$$

Die Doppelebenen der Schaarschaar $f_2^{(\lambda'\lambda'')}$ bilden den Ebenenbüschel (10.), welcher zugleich die Doppeltangentialebenen von Ψ_{12} darstellt.

Unter den Flächen $f_2^{(\lambda'\lambda'')}$ sind diejenigen ausgezeichnet, für welche $\lambda = \lambda' = \lambda''$ ist. Zu jedem Punkte von R_5, also auch von K_3 gehört eine solche Fläche $f_2^{(\lambda^2)}$, in Bezug auf welche dem Punkte λ der einen jener Curven die Schmiegungsebene in dem entsprechenden Punkte der anderen als Polarebene zugewiesen ist. Der Ort der Pole einer Ebene u' bezüglich aller $f_2^{(\lambda^2)}$ ist eine dritte gemischte Osculante von R_5. Der Ort der Pole aller Schmiegungsebenen von K_3 bezüglich der $f_2^{(\lambda^2)}$ ist die Fläche Ψ_{12}. Die acht Doppelebenen, welche unter den $f_2^{(\lambda^2)}$ sich befinden, sind die stationären Ebenen von R_5.

§ 3^c.

Der Ebenenbüschel C_6.

Der Ebenenbüschel C_6 ist durch das Verschwinden aller Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

Werden diese Determinanten multiplicirt mit:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ 1 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \lambda_2^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_5 & \cdot & \cdot & \lambda_5^4 \end{vmatrix},$$

so verwandelt sich die Matrix nach einigen einfachen Reductionen in folgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \psi(\lambda_1) & \lambda_1\psi(\lambda_1) & \lambda_1^2\psi(\lambda_1) & \lambda_1^3\psi(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \psi(\lambda_2) & \lambda_2\psi(\lambda_2) & \cdots & \lambda_2^3\psi(\lambda_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_5 & \psi(\lambda_5) & \cdots & \cdots & \lambda_5^3\psi(\lambda_5) \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$ die Parameter eines Quintupels der Fundamentalinvolution J_5 sind und $\psi(\lambda_1), \ldots$ die Ausdrücke bedeuten:

$$\psi(\lambda_1) = b + c\sum_2^5{}_\beta \lambda_\beta + d\sum_2^5{}_{\beta\gamma} \lambda_\beta\lambda_\gamma + e\sum_2^5{}_{\beta\gamma\delta}\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta + f\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 \quad \text{etc.}$$

Die Gleichung von C_6 kann somit auf unendlich viele Arten in die Form gebracht werden:

$$(17.)\qquad \sum_1^5{}_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} \frac{\psi(\lambda_\alpha)\psi(\lambda_\beta)\psi(\lambda_\gamma)(\mu-\lambda_\alpha)(\mu-\lambda_\beta)(\mu-\lambda_\gamma)}{(\lambda_\delta-\lambda_\alpha)(\lambda_\delta-\lambda_\beta)(\lambda_\delta-\lambda_\gamma)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\alpha)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\beta)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\gamma)} = 0,$$

wobei μ einen ganz beliebigen Werth hat.

Mit Hülfe dieser Darstellung von C_6, können wir dessen Tangenten berechnen. Die Ebene der drei Punkte $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ auf K berührt die Abwickelbare von C_6 längs eines Strahles, welchen man durch Nullsetzen des Factors von $\psi(\lambda_1).\psi(\lambda_2)$ in (17.) erhält. Führt man die Werthe der $\psi(\lambda)$ wieder ein, so ergiebt sich:

$$(18.)\quad \begin{cases} a+2b(\lambda_1+\lambda_2)+c((\lambda_1+\lambda_2)^2+2\lambda_1\lambda_2)+2d\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)+e\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ +\mu\{b+2c(\lambda_1+\lambda_2)+d((\lambda_1+\lambda_2)^2+2\lambda_1\lambda_2)+2e\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)+f\lambda_1^2\lambda_2^2\} = 0. \end{cases}$$

Der durch diese Gleichung dargestellte Punkt ist der Berührungspunkt der betrachteten Tangente von C_6 mit der *Steiner*schen Fläche, für welche $R_4^{(\mu)}$ Haupttangentencurve ist. Setzt man in (18.) einmal $\mu = \lambda_1$, das andere Mal $\mu = \lambda_2$, so erhält man die beiden Berührungspunkte der Tangente von C_6 mit der Fläche Ψ_{12}.

Wird aber in (18.) $\lambda_1 = \lambda_2$ gesetzt, so ist die betrachtete Ebene von C_6 eine stationäre Ebene von R_5, und wir erkennen, dass die acht Tangenten von R_5 in ihren stationären Ebenen auch Tangenten von C_6 sind.

§ 3ᵈ.

Ueber die stationären Ebenen und das Nullsystem von R_5.

Die acht stationären Ebenen von R_5 sind Schmiegungsebenen aller ersten Osculanten $R_4^{(\lambda)}$ und deshalb Tangentialebenen aller Flächen zweiter

Klasse, welche von den Schmiegungsebenen der verschiedenen $R_4^{(\lambda)}$ berührt werden.

Die Gleichung dieser Flächen ergiebt sich aber durch Nullsetzen der Covariante zweiten Grades zweiter Ordnung der Form:

$$(au)+5(bu)\lambda+10(cu)\lambda^2+10(du)\lambda^3+5(eu)\lambda^4+(fu)\lambda^5,$$

also durch:

$$(19.)\quad (a+b\lambda)(e+f\lambda)-4(b+c\lambda)(d+e\lambda)+3(c+d\lambda)^2 = 0.$$

Die acht stationären Ebenen von R_5 sind somit acht associirte Ebenen einer Schaarschaar zweiter Klasse. Wir wollen noch zeigen, dass die Tangenten von R_5 in diesen Ebenen demjenigen linearen Strahlencomplexe angehören, dessen conjugirte Ebenen apolare Schnittpunktsysteme von R_5 ergeben. Wenn die Ebenen u und u' apolare Schnittpunktsysteme liefern, ist die Gleichung erfüllt:

$$(au')(fu)-5(bu')(eu)+10(cu')(du)-10(du')(cu)+5(eu')(bu)-(fu')(au) = 0.$$

Sind $q_{ik}=[u_iu'_k]$ die Coordinaten der Schnittgeraden von u und u', so folgt hieraus:

$$(20.)\quad \Sigma q_{ik}[a_if_k]-5\Sigma q_{ik}[b_ie_k]+10\Sigma q_{ik}[c_id_k] = 0$$

als Gleichung des zu R_5 gehörenden linearen Complexes.

Die Coordinaten der Tangente von R_5 in dem Punkte λ sind aber:

$$\varrho q_{ik} = [a_l+4b_l\lambda+\cdots+e_l\lambda^4,\ b_m+4c_m\lambda+\cdots+f_m\lambda^4].$$

Bilden wir hieraus den auf der linken Seite von (20.) stehenden Ausdruck und setzen ihn gleich Null, so ergiebt sich die in § 3[a] angegebene Gleichung für die Parameter der stationären Ebenen von R_5, wodurch der Satz bewiesen ist. Er lässt sich noch einfacher beweisen, wenn R_5 als das perspective Bild einer rationalen Curve fünfter Ordnung in einem Raume von vier Dimensionen angesehen wird, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

§ 4.

Die ebene rationale Curve fünfter Ordnung.

Für $i=1, 2, 3$ sei die Parameterdarstellung von R_5 gegeben durch:

$$(1.)\quad \varrho x_i = a_i+5b_i\lambda+\cdots+f_i\lambda^5.$$

Die Fundamentalinvolution J_5 fünfter Ordnung zweiter Stufe ergiebt sich in folgender Weise. Man stelle irgend eine zweite gemischte Osculante $R_3^{(\lambda_1\lambda_2)}$

von R_5 dar und suche die Parameter λ_3, λ_4, λ_5 für ihre Wendepunkte. Es ist dann das Werthsystem $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_5$ ein Quintupel der Involution. Wird ein Punkt λ_1 auf R_5 beliebig angenommen, so bildet er mit unendlich vielen Quadrupeln Quintupel von J_5. Diese Quadrupel bilden die zu der ersten Osculante $R_4^{(\lambda_1)}$ gehörende Fundamentalinvolution $J_4^{(\lambda_1)}$.

Ist ein Quintupel von J_5 durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad A\lambda^5+B\lambda^4+\dots+F = 0$$

gegeben, so findet man ähnlich wie früher die drei Relationen:

$$(3.)\qquad a_iA-b_iB+c_iC-\dots-f_iF = 0.$$

Die zehn gemischten zweiten Osculanten $R_3^{(\lambda_1\lambda_2)}$, für welche λ_1 und λ_2 demselben Quintupel von J_5 angehören, haben im Ganzen zehn Wendetangenten, welche die Seiten eines in der Ebene von R_5 liegenden vollständigen Fünfecks sind. Jedem Eckpunkte desselben ist derjenige Punkt λ_α von R_5 zugewiesen, für welchen die $R_3^{(\lambda_\alpha\lambda_\beta)}$ keine durch den ersten Punkt gehenden Wendetangenten besitzen. Da λ_α mit jedem anderen Parameterwerthe zu einem Paare von J_5 combinirt werden kann, so wird der dem Punkte λ_α von R_5 entsprechende Punkt nicht völlig bestimmt sein, sondern einen Ort beschreiben. Es ist nun, wie früher, der dem Punkte λ_1 von R_5 entsprechende Punkt X der Ebene in doppelter Weise darstellbar:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sigma X_i = a_i+b_i\sum_2^5{}_\alpha\lambda_\alpha+c_i\sum_2^5{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+\dots+f_i\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5, \\ \varrho X_i = b_i+c_i\sum_2^5{}_\alpha\lambda_\alpha \qquad\qquad +\dots+f_i\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5, \\ \qquad\qquad \text{wobei } \sigma+\lambda_1\varrho = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination der $\lambda_2, \dots \lambda_5, \sigma, \varrho$ findet man hieraus als Ort des Punktes X, welcher dem Punkte λ_1 von R_5 zugewiesen ist, die Gerade:

$$(5.)\qquad G^{(\lambda)} = \begin{vmatrix} -\lambda x_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ -\lambda x_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ -\lambda x_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ x_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo für λ_1 nur λ gesetzt ist. Die Gerade $G^{(\lambda)}$ beschreibt einen zu R_5 projectiven Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt wir mit P bezeichnen.

Eliminiren wir aber aus den beiden ersten Gleichungssystemen (4.) die Grössen λ_3, λ_4, λ_5, ϱ und σ und setzen statt λ_2 wieder λ, so erhalten wir die Gleichung eines Kegelschnittes $K_2^{(\lambda)}$:

$$(6.)\qquad K_2^{(\lambda)} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_1+b_1\lambda & b_1+c_1\lambda & c_1+d_1\lambda & d_1+e_1\lambda \\ x_2 & 0 & a_2+b_2\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3 & 0 & a_3+b_3\lambda & \cdot & \cdot & d_3+e_3\lambda \\ 0 & x_1 & b_1+c_1\lambda & c_1+d_1\lambda & \cdot & e_1+f_1\lambda \\ 0 & x_2 & b_2+c_2\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_3 & b_3+c_3\lambda & \cdot & \cdot & e_3+f_3\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ihm sind alle Vierecke einbeschrieben, welche mit Punkten der Geraden $G^{(\lambda)}$ ein oben beschriebenes Fünfeck bilden. Alle Kegelschnitte $K_2^{(\lambda)}$ enthalten den Mittelpunkt P des Büschels (5.). Fünf zu einem Quintupel von J_5 gehörende $K_2^{(\lambda)}$ schneiden einander, abgesehen von P, in den fünf Punkten der Ebene, welche dem Quintupel zugewiesen sind. Durch jeden Punkt gehen vier $K_2^{(\lambda)}$. Die Ebene ist hier der Träger der Fundamentalinvolution fünfter Ordnung zweiter Stufe der Art, dass jeder Punkt nur einem Quintupel angehört.

Die Involution J_5 enthält ∞^2 Involutionen fünfter Ordnung erster Stufe, deren Quintupel je eine Curve K_3 dritter Ordnung, welche in P einen Doppelpunkt hat, erfüllen. Die Parameterdarstellung einer solchen K_3 kann man erhalten, wenn man zu den drei Formen (1.) noch eine vierte: $a_4+5b_4\lambda+\cdots+f_4\lambda^5$ mit beliebigen Coefficienten hinzufügt und dann setzt:

$$\tau X_i = \alpha_i+3\beta_i\lambda+3\gamma_i\lambda^2+\delta_i\lambda^3 \qquad (i=1,2,3),$$

wobei $\alpha_i, \ldots \delta_i$ die in (9^b.) § 3" gegebenen Ausdrücke bedeuten. Alle K_3 bilden einen Bündel, je zwei schneiden einander, abgesehen von P, in fünf Punkten eines Quintupels der Ebene; je zwei Quintupel derselben lassen sich durch eine K_3 verbinden.

Die Gleichung einer solchen K_3 ist:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ x_2 & 0 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3 & 0 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & e_3 \\ 0 & x_1 & b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & f_1 \\ 0 & x_2 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_3 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot & f_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & \cdot & \cdot & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 & \cdots & e_1 \\ x_2 & a_2 & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_3 & a_3 & \cdot & \cdots & e_3 \\ 0 & b_1 & \cdot & \cdots & f_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & b_3 & \cdot & \cdots & f_3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_1 & \cdots & e_1 \\ x_2 & 0 & a_2 & \cdots & e_2 \\ x_3 & 0 & a_3 & \cdots & e_3 \\ 0 & x_1 & b_1 & \cdots & f_1 \\ 0 & x_2 & b_2 & \cdots & f_2 \\ 0 & x_3 & b_3 & \cdots & f_3 \\ 0 & 0 & b_4 & \cdots & f_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_1 & \cdots & e_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & e_2 \\ 0 & a_3 & \cdots & e_3 \\ x_1 & b_1 & \cdots & f_1 \\ x_2 & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_3 & b_3 & \cdots & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier $a_4 = -\lambda^5, \ldots f_4 = 1$, so zerfällt K_3 in $K_2^{(\lambda)}$ und $G^{(\lambda)}$. Wird die ebene R_5 als perspectives Bild von Raumcurven R_5' aufgefasst, so finden sich unter letzteren ∞^2 einander nicht collineare Curven; zu jeder gehört eine K_3 der Ebene. Einfach unendlich viele R_5' haben je eine stationäre Ebene, welche fünf unendlich nahe Punkte der Curve enthält, und zwar kann jeder Punkt von R_5 als Bild eines solchen Punktes von R_5' angesehen werden. Für solche R_5' zerfällt K_3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade. (Vergl. § 3^a).

Ein neutrales Elementenpaar der Involution J_5 ist ein solches, welches noch kein Quintupel bestimmt, sondern durch unendlich viele Tripel einer Involution dritter Ordnung erster Stufe zu Quintupeln von J_5 ergänzt wird. Für eine solche Involution muss K_3 zerfallen in drei Gerade, von welchen zwei durch P gehen und das neutrale Paar repräsentiren und die dritte l der Träger der Involution dritter Ordnung ist. Die Gerade l schneidet jede K_3 in drei Punkten eines Quintupels dieser Curve und jede $K_2^{(\lambda)}$ in zwei Punkten eines Quadrupels und ist deshalb gemeinsame Tangente aller Curven dritter Klasse $F_3^{(\lambda)}$, deren Tangenten die Quadrupelpunkte der $K_2^{(\lambda)}$ verbinden. Zwei dieser Curven $F_3^{(\lambda)}$ haben die Seiten des Dreiecks gemein, in dessen Ecken die zugehörigen $K_2^{(\lambda)}$ sich schneiden und folglich noch sechs Linien l. Es giebt somit sechs neutrale Elementenpaare von J_5. Die Linien l werden durch das Verschwinden aller Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt.

Jede Linie l ist Bestandtheil zweier verschiedenen $K_2^{(\lambda)}$, welche zu

ersten Osculanten $R_4^{(\lambda)}$ mit Undulationspunkten gehören*). Es giebt somit unter den ersten Osculanten von R_5 sechs Paare, welche Undulationspunkte besitzen. R_5 ist perspectives Bild von sechs Raumcurven R'_5, welche je zwei Schmiegungsebenen mit fünf unendlich nahen Punkten besitzen.

Unter allen Quintupeln von R_5 giebt es bekanntlich ein ausgezeichnetes, welches apolar ist zu allen anderen und dessen Punkte auf einer Geraden liegen. Stellt man nämlich die Bedingung dafür auf, dass zwei Gerade u und u' apolare Punktgruppen aus R_5 ausschneiden, so findet man, wenn x der Schnittpunkt der Geraden u und u' ist:

$$[xaf]-5[xbe]+10[xcd] = 0.$$

Setzt man hier für x die Werthe (1.) ein, so erhält man die Gleichung für die Parameter des ausgezeichneten Quintupels. Ihm entspricht in der Ebene von R_5 ein ausgezeichneter Büschel von Curven K_3.

Wenn die Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_1 & c_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden, so ist der Punkt P unbestimmt und alle $K_2^{(\lambda)}$ sowie alle K_3 fallen auf denselben Kegelschnitt K_2. R_5 ist in diesem Falle das Bild einer R'_5, welche von einem Punkte ihrer zugeordneten kubischen Raumcurve K_3 projicirt wird. (§ 3^a.) Die sechs Linien l sind die Seiten eines dem Kegelschnitte K_2 einbeschriebenen Vierecks. Die ebene Curve fünfter Ordnung, deren Parameterdarstellung durch irgend drei Formen, welche gleich Null gesetzt Quintupel von J_5 liefern, gegeben ist, erhält hier einen vierfachen Punkt.

§ 5.

Die rationale Raumcurve sechster Ordnung.

Die Coordinaten von R_6 seien für $i = 1, 2, 3, 4$ gegeben durch:

$$\varrho x_i = a_i+6b_i\lambda+15c_i\lambda^2+\cdots+g_i\lambda^6.$$

Die Fundamentalinvolution sechster Ordnung zweiter Stufe J_6 finden wir in

*) Vergl. dieses Journal, Bd. 101, S. 315.

folgender Weise. Wir bilden für die beliebigen Parameter λ_1 und λ_2 die gemischte zweite Osculante $R_4^{(\lambda_1\lambda_2)}$ und suchen die vier Parameterwerthe λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, welchen stationäre Ebenen von $R_4^{(\lambda_1\lambda_2)}$ entsprechen. Die sechs Parameterwerthe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_6$ bilden dann ein Sextupel von J_6.

Bestimmt die Gleichung:

$$(2.)\qquad A\lambda^6+B\lambda^5+C\lambda^4+\dots+G = 0$$

ein solches Sextupel, so ergeben sich für die Coefficienten die vier Relationen:

$$(3.)\qquad a_i A-b_i B+c_i C-\dots+g_i G = 0.$$

Die dreifachen Elemente dieser Involution entsprechen den zwölf stationären Ebenen von R_6.

Alle Quintupel der Fundamentalinvolution einer ersten Osculante $R_5^{(\lambda)}$ von R_6 werden durch λ zu Sextupeln von J_6 ergänzt. Die zu $R_5^{(\lambda_1)}$ gehörende kubische Raumcurve $K_3^{(\lambda_1)}$ (§ 3^a.) wird in folgender Weise dargestellt:

$$\varrho x_i = (a_i+b_i\lambda_1)+(b_i+c_i\lambda_1)\sum_3^6{}_a\lambda_a+\dots+(e_i+f_i\lambda_1)\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6$$

und

$$\sigma x_i = (b_i+c_i\lambda_1)+(c_i+d_i\lambda_1)\sum_3^6{}_a\lambda_a+\dots+(f_i+g_i\lambda_1)\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6,$$

wobei:

$$\varrho+\lambda_2\sigma = 0.$$

Durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_3, \dots \lambda_6, \varrho, \sigma$ folgt hieraus:

$$(4.)\qquad T_2 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_1 & b_1 & \cdots & f_1 \\ x_2 & 0 & a_2 & \cdot & \cdots & f_2 \\ x_3 & 0 & a_3 & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_4 & 0 & a_4 & \cdot & \cdots & f_4 \\ 0 & x_1 & b_1 & c_1 & \cdots & g_1 \\ 0 & x_2 & b_2 & \cdot & \cdots & g_2 \\ 0 & x_3 & b_3 & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_4 & b_4 & \cdot & \cdots & g_4 \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung des Ortes für alle $K_3^{(\lambda)}$. Der Fläche T_2 sind alle Tetraeder, welche von den stationären Ebenen der zweiten gemischten Osculanten $R_4^{(\lambda_1\lambda_2)}$ gebildet werden, einbeschrieben. Sechs zu einem Sextupel von R_6 gehörende $K_3^{(\lambda)}$ haben im Ganzen sechs Punkte eines Sechsecks gemein.

Jeder dieser $K_3^{(\lambda)}$ und somit dem entsprechenden Punkte λ von R_6 ist derjenige Punkt des Sechsecks zugewiesen, welchen $K_3^{(\lambda)}$ nicht enthält. Es sind somit die Punkte von T_2 zu Sextupeln so geordnet, dass jeder Punkt nur einem derselben angehört, und die Involution J_6 ist auf die Fläche T_2 übertragen. Alle Punkte von T_2, welche demselben Punkte λ von R_6 entsprechen, liegen auf einer Geraden, welche nicht Sehne der $K_3^{(\lambda)}$ ist. Hierdurch ist die Regelschaar von T_2 projectiv zu R_6. Alle Sextupel von T_2, welche einer Involution sechster Ordnung erster Stufe von J_6 entsprechen, liegen auf einer rationalen Raumcurve K_4, welche von den Regelstrahlen der T_2 nur je in einem Punkte geschnitten werden. Es giebt im Ganzen ∞^2 solcher K_4. Einfach unendlich viele zerfallen in eine Curve $K_3^{(\lambda)}$ und einen Regelstrahl. Einige der $K_3^{(\lambda)}$ können weiter zerfallen in eine Gerade und einen Kegelschnitt K_2. Die beiden Regelstrahlen, welche dann Bestandtheile einer K_4 sind, entsprechen einem neutralen Elementenpaare von J_6, welches noch kein Sextupel, sondern eine Involution vierter Ordnung erster Stufe bestimmt, dessen Träger der Kegelschnitt ist. Ein solcher Kegelschnitt K_2 schneidet jede K_4 in vier Punkten eines Sextupels und jede $K_3^{(\lambda)}$ in drei Punkten eines Quintupels der auf diesen Curven befindlichen Involutionen.

Es folgt hieraus (§ 3ᶜ.), dass die Ebenen aller K_2 gemeinschaftlich sind den sämmtlichen Büscheln sechster Ordnung $C_6^{(\lambda)}$, welche zu den $R_5^{(\lambda)}$ gehören und deshalb durch das Verschwinden aller Determinanten der Matrix:

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt sind. Die Zahl dieser Ebenen ist aber gleich zehn. Denn eine *Steiner*sche Fläche, für welche $R_4^{(\lambda'\lambda'')}$ Haupttangentencurve ist, hat mit einer $C_6^{(\lambda)}$ zunächst die acht Seitenflächen der Tetraeder gemein, deren Ecken auf $K_3^{(\lambda)}$ durch die Curven $K_3^{(\lambda')}$ und $K_3^{(\lambda'')}$ ausgeschnitten werden. Es bleiben somit noch zehn gemeinsame Ebenen aller $C_6^{(\lambda)}$ übrig. Unter den ersten Osculanten $R_5^{(\lambda)}$ giebt es folglich zehn Paare, welche von einer stationären Ebene in fünf unendlich nahen Punkten geschnitten werden. (§ 3ᵃ.)

In naher Beziehung zu R_6 steht die Fläche vierter Klasse Φ_4, welche von den stationären Ebenen aller $R_4^{(\lambda'\lambda'')}$ berührt wird. Dieser Fläche sind doppelt unendlich viele vollständige Sechsecke umschrieben, welche der

Fläche T_2 einbeschrieben sind. Die Gleichung von Φ_4 ergiebt sich in

$$(6.)\qquad \Phi_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung kann auf ∞^2 Arten in eine merkwürdige Form gebracht werden. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_6$ die Elemente eines Sextupels von J_6 und setzen wir:

$$\psi(\lambda_1) = b + c\sum_2^6{}_\alpha \lambda_\alpha + d\sum_2^6{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta + \dots + g\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 \quad \text{etc.,}$$

so folgt durch Multiplication von Φ_4 mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^5 \\ 1 & \lambda_2 & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \lambda_6 & \cdot & \dots & \lambda_6^5 \end{vmatrix}$$

die Gleichung:

$$\sum_1^6{}_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \frac{\psi(\lambda_\alpha)\psi(\lambda_\beta)\psi(\lambda_\gamma)\psi(\lambda_\delta)}{(\lambda_\varepsilon-\lambda_\alpha)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\beta)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\gamma)(\lambda_\varepsilon-\lambda_\delta)(\lambda_\zeta-\lambda_\alpha)(\lambda_\zeta-\lambda_\beta)(\lambda_\zeta-\lambda_\gamma)(\lambda_\zeta-\lambda_\delta)} = 0.$$

Der Berührungspunkt von Φ_4 mit der Ebene, welche die drei Punkte λ_δ, λ_ε, λ_ζ von T_2 verbindet, hat demnach die Gleichung:

$$\sum_{\mu,\nu,\varrho=\delta,\varepsilon,\zeta} \frac{\psi(\lambda_\mu)(\lambda_\mu-\lambda_\alpha)(\lambda_\mu-\lambda_\beta)(\lambda_\mu-\lambda_\gamma)}{(\lambda_\mu-\lambda_\nu)(\lambda_\mu-\lambda_\varrho)} = 0.$$

Nach einigen Reductionen und Berücksichtigung von (3.) folgt für den Berührungspunkt:

$$\begin{aligned} &(a+2b\lambda_\alpha+c\lambda_\alpha^2)+2(b+2c\lambda_\alpha+d\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta+(c+2d\lambda_\alpha+e\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta^2 \\ &+2\{(b+2c\lambda_\alpha+d\lambda_\alpha^2)+2(c+2d\lambda_\alpha+e\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta+(d+2e\lambda_\alpha+f\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta^2\}\lambda_\gamma \\ &+\ \{(c+2d\lambda_\alpha+e\lambda_\alpha^2)+2(d+2e\lambda_\alpha+f\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta+(e+2f\lambda_\alpha+g\lambda_\alpha^2)\lambda_\beta^2\}\lambda_\gamma^2 = 0. \end{aligned}$$

Der Berührungspunkt der Ebene mit Φ_4 ist daher der gemeinsame Punkt der drei Osculanten $R_2^{(\lambda_\alpha^2\lambda_\beta^2)}$, $R_2^{(\lambda_\beta^2\lambda_\gamma^2)}$ und $R_2^{(\lambda_\gamma^2\lambda_\alpha^2)}$. Setzt man $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$, so ist die Ebene der drei Punkte λ_δ, λ_ε, λ_ζ auf T_2 eine stationäre Ebene von R_6 und für den Berührungspunkt derselben mit Φ_4 ergiebt sich der Osculationspunkt der Ebene auf R_6. Φ_4 hat mit R_6 im Ganzen 48 Ebenen gemein, welche zu vier mit den zwölf stationären Ebenen von R_6 zusammenfallen.

§ 6.

Die rationale Raumcurve siebenter Ordnung.

Die Parameterdarstellung von R_7 sei:

$$(1.)\qquad \varrho x_i = a_i + 7b_i\lambda + \cdots + h_i\lambda^7.$$

Die Fundamentalinvolution siebenter Ordnung dritter Stufe J_7 finden wir in folgender Weise: Für die gemischte dritte Osculante $R_4^{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}$ mögen den Parameterwerthen λ_4, λ_5, λ_6, λ_7 stationäre Ebenen entsprechen; dann bilden die Elemente λ_1, λ_2, ... λ_7 ein Septupel der Involution J_7. Ihr gehören alle Septupel an, welche durch zwei Parameterwerthe λ_1 und λ_2 und die Quintupel der Involution fünfter Ordnung erster Stufe der gemischten zweiten Osculante $R_5^{(\lambda_1\lambda_2)}$, und diejenigen, welche durch ein Element λ_1 und die Sextupel der Involution sechster Ordnung zweiter Stufe der $R_6^{(\lambda_1)}$ gebildet werden.

Jede erste Osculante liefert als Träger der Involution $J_6^{(\lambda)}$ eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung $T_2^{(\lambda)}$, deren Gleichung wir aus (§ 5, (4.)) erhalten durch Einsetzen von

$$a_i + b_i\lambda,\quad b_i + c_i\lambda,\quad \ldots\quad g_i + h_i\lambda \quad \text{für resp.}\quad a_i,\quad b_i,\quad \ldots\quad g_i.$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen sechs solcher Flächen $T_2^{(\lambda)}$. Zwei der Flächen $T_2^{(\lambda)}$ und $T_2^{(\lambda')}$ haben die Curve $K_3^{(\lambda\lambda')}$ mit einander gemein und deshalb auch eine Gerade l, den Träger eines zu R_7 projectiven Ebenenbüschels, dessen Gleichung nach Früherem durch Elimination von $\lambda_2, \ldots \lambda_7, \varrho, \sigma$ aus den Gleichungen:

$$\varrho x_i = a_i + b_i \sum_2^7{}_a \lambda_a + c_i \sum_2^7{}_{a,\beta} \lambda_a\lambda_\beta + \cdots + g_i \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7,$$

$$\sigma x_i = b_i + c_i \sum_2^7{}_a \lambda_a + \cdots + h_i \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7,$$

$$\sigma\lambda_1 + \varrho = 0$$

erhalten wird.

Es folgt, wenn wir statt λ_1 wieder λ setzen:

$$(2.)\qquad G^{(\lambda)} = \begin{vmatrix} -\lambda x_1 \cdot & a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & g_1 \\ -\lambda x_2 & a_2 & . & . & \cdots & . \\ -\lambda x_3 & a_3 & . & . & \cdots & . \\ -\lambda x_4 & a_4 & . & . & \cdots & g_4 \\ x_1 & b_1 & c_1 & . & \cdots & h_1 \\ x_2 & b_2 & . & . & \cdots & . \\ x_3 & b_3 & . & . & \cdots & . \\ x_4 & b_4 & . & . & \cdots & h_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Träger dieses zu R_7 projectiven Büschels gehört allen Flächen $T_2^{(\lambda)}$ an. Sieben zu einem Septupel von J_7 gehörende Flächen $T_2^{(\lambda)}$ schneiden einander, abgesehen von der Geraden l, in sieben Punkten. Durch je sechs dieser Punkte geht eine Fläche $T_2^{(\lambda)}$, welche dem siebenten Punkte zugeordnet ist. Dieser Punkt, dessen Ort die Ebene $G^{(\lambda)}$ ist, entspricht nun dem Punkte von R_7, zu welchem $T_2^{(\lambda)}$ gehört. Somit sind die Punkte des unendlichen Raumes zu Septupeln geordnet der Art, dass jeder Punkt nur einem Septupel angehört. Die Involution dritter Stufe J_7 ist auf den Raum abgebildet, und je sieben Punkte eines Septupels des Raumes werden von l durch sieben Ebenen eines Septupels der zur Fundamentalinvolution auf R_7 projectiven Involution des Büschels l projicirt.

Wird eine beliebige der Involution J_7 angehörende Involution siebenter Ordnung zweiter Stufe betrachtet, so findet man als Ort der Septupel des Raumes eine Regelfläche φ_3 dritten Grades, welche in l eine Doppellinie hat. Diese φ_3 bilden ein lineares Flächensystem dritter Stufe und können auf einfach unendlich viele Arten in eine $T_2^{(\lambda)}$ und eine $G^{(\lambda)}$ zerfallen. Zwei der φ_3 schneiden einander, abgesehen von l, in einer Raumcurve K_5 fünfter Ordnung, deren viermal schneidende Sehne die Linie l ist, und welche sich als Träger einer zu J_7 gehörenden Involution siebenter Ordnung erster Stufe darstellt.

Die Curven K_5; deren Zahl vierfach unendlich ist, können auf dreifach unendlich viele Arten in eine Gerade und eine $K_4^{(\lambda)}$, auf doppelt unendlich viele Arten in zwei Gerade und eine $K_3^{(\lambda_1\lambda_2)}$, auf einfach unendlich viele Arten in drei Gerade und einen Kegelschnitt und schliesslich eine endliche Zahl mal in fünf Gerade zerfallen.

Jede φ_3 enthält ∞^2 Curven K_5, ∞^1 Curven $K_4^{(\lambda)}$ und 15 Curven $K_3^{(\lambda_1\lambda_2)}$, aber im Allgemeinen keinen Kegelschnitt K_2, welcher Bestandtheil einer K_5 ist.

Die Kegelschnitte K_2 sind Träger von Involutionen vierter Ordnung erster Stufe, welche je mit einem neutralen Tripel von J_7 unendlich viele Septupel liefern. Die Gleichung des Ebenenbüschels zehnter Ordnung, welcher aus den Ebenen aller K_2 besteht, ist durch das Verschwinden aller Determinanten der Matrix:

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & g \\ d & e & f & g & h \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

Zerfällt K_5 in fünf Gerade, so schneiden vier derselben die Gerade l und repräsentiren ein neutrales Quadrupel von J_7, die fünfte Gerade aber ist Träger einer Involution dritter Ordnung erster Stufe. Die Zahl dieser zerfallenden K_5 ist gleich der Zahl der eine allgemeine rationale Curve R_7 viermal treffenden Geraden und deshalb nach der Berechnung des Herrn *Fr. Meyer**) gleich zwanzig. Der Ebenenbüschel (3.) besitzt somit auch 20 vierfache Axen.

*) Vergl. *Meyer*, Apolarität etc. S. 363.

Aachen, im Juli 1887.

Zurückführung der *Grassmann*schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von *Chasles*, *Cayley* und *Hesse* angegebenen Erzeugungsweisen.

(Von Herrn *H. Schroeter* in Breslau.)

In dem Aufsatze: „*Ueber die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Curven*" (dieses Journal, Bd. 36, S. 177) hat *H. Grassmann* drei verschiedene Definitionen der allgemeinen Curve dritter Ordnung aufgestellt, welche er in Vorschlag bringt, um eine methodische Behandlung der Curve darauf zu gründen. Dies erübrigt sich, wenn man erkennt, dass die beiden ersten *Grassmann*schen Definitionen nichts anderes sind, als Umformungen der allgemeinen *Chasles*schen Erzeugungsweise der $C^{(3)}$ vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines Strahlbüschels in projectiver Beziehung, und dass die dritte *Grassmann*sche Definition übereinkommt mit der *Cayley-Hesse*schen Erzeugung vermittelst dreier Paare conjugirter Punkte *).

Die *Chasles*sche und *Cayley-Hesse*sche Definition der $C^{(3)}$ eröffnen einen unmittelbaren und leichten Zugang zu den Eigenschaften der Curve, während die *Grassmann*schen Definitionen, welche man mit *Clebsch* (Math. Annalen Bd. V, S. 424) „mechanische" nennen kann, nur gewisse Eigenschaften ausdrücken, vermittelst deren man sich Mechanismen herstellen soll, um Punkte der Curve zu erhalten. Wie aber diese Mechanismen wirklich hergestellt werden können, geben die *Grassmann*schen Definitionen nicht an, und sie sind daher auch für die wirkliche Erzeugung der $C^{(3)}$ und die Herleitung ihrer Eigenschaften unfruchtbar geblieben.

---

*) Siehe des Verfassers: „Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung" Leipzig, B. G. Teubner 1888.

Die Zurückführung der *Grassmann*schen Erzeugungsweisen auf die oben genannten ist der Zweck der nachfolgenden Mittheilung.

---

1. Die erste *Grassmann*sche Definition der $C^{(3)}$ [Nr. 1 in der oben angeführten Abhandlung (dieses Journal Bd. 36, S. 177), wo aber zwei Bedingungen ausgelassen sind, die sich in der früheren Abhandlung: „Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse" (dieses Journal, Bd. 31, S. 122) angegeben finden] lautet:

„Wenn die Winkel an der Spitze zweier Dreiecke stetig an einem Punkte x liegen" (das soll heissen, wenn zwei Dreiecke dieselbe Spitze und eine von ihr ausgehende Seite gemeinsam haben) „und auch die Grundseiten, wie auch die äussersten Schenkel" (soll heissen, die beiden übrigen von der Spitze ausgehenden Seiten) „um feste Punkte cc_1aa_1 sich drehen, die Endpunkte der Grundseiten aber in festen Geraden BDB_1D_1 sich bewegen: so beschreibt die gemeinschaftliche Spitze x ein Gebilde vom dritten Grade."

Unter einer geringen Abänderung der Bezeichnung sprechen wir diese Definition so aus:

In der Ebene sind gegeben vier beliebige Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{B}_2$$

und vier beliebige Gerade

$$a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2;$$

auf der Geraden a_1 soll ein Punkt $\mathfrak{x}_1$ und auf der Geraden a_2 ein Punkt $\mathfrak{x}_2$ so gewählt werden, dass wenn man die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1,\ b_1) = \mathfrak{y}_1,$$
$$(\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2,\ b_2) = \mathfrak{y}_2$$

bezeichnet, die drei Strahlen

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_1| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{s}$ schneiden; der Punkt $\mathfrak{s}$ wird dann nach *Grassmann* eine Curve dritter Ordnung beschreiben, denn er erfüllt die geforderten Bedingungen, indem die beiden Dreiecke

$$\mathfrak{s}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2$$

mit der gemeinschaftlichen Spitze $\mathfrak{s}$ zugleich die gemeinschaftliche Seite

$|\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ haben, während die übrigen Seiten $|\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1|\,|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|\,|\mathfrak{z}\mathfrak{x}_2|\,|\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2|$ durch die festen Punkte $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_2$ und die übrigen vier Ecken $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2$ auf den festen Geraden $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ liegen.

Es wird nun die Aufgabe sein, solche Punkte $\mathfrak{z}$ zu finden und ihren Ort zu ermitteln. Dies führt aber geradezu auf die *Chasles*sche Erzeugungsweise. Halten wir nämlich zuerst den Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 fest und verändern allein den Punkt $\mathfrak{x}_2$ auf a_2, indem wir ihn eine gerade Punktreihe durchlaufen lassen, so bleibt der Strahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$, also auch der Punkt $\mathfrak{y}_1$ fest. Der Punkt $\mathfrak{y}_2$ beschreibt aber auf b_2 eine mit der von $\mathfrak{x}_2$ auf a_2 beschriebenen projective Punktreihe, also beschreiben $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ und $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{x}_2|$ zwei projective Strahlbüschel um die Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{B}_2$; der Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ und $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{x}_2|$ wird also einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ beschreiben, und wo dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den Strahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_1| = x$ schneidet, da liegt offenbar ein Punkt $\mathfrak{z}$ des gesuchten Ortes. Es giebt also auf dem festgehaltenen Strahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_1|$ zwei Punkte $\mathfrak{z}$ des gesuchten Ortes.

Verändern wir nun zweitens den Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf der Geraden a_1, indem wir ihn eine gerade Punktreihe durchlaufen lassen, so verändert sich mit ihm auch der Strahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_1| = x$, indem er ein Strahlbüschel um den Mittelpunkt $\mathfrak{B}_1$ beschreibt; es verändert sich aber auch mit ihm der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, und es ist leicht zu sehen, dass derselbe ein Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten beschreibt. In der That geht der von dem Schnittpunkte $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{x}_2,\, \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2)$ beschriebene Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ beständig durch den festen Mittelpunkt $\mathfrak{B}_2$ des einen erzeugenden Strahlbüschels; ferner geht er immer durch den Schnittpunkt $(a_2 b_2)$, weil die beiden auf a_2 und b_2 von den Punkten $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ beschriebenen Punktreihen perspectiv liegen rücksichtlich des Perspectivitätscentrums $\mathfrak{A}_2$, also in dem Schnittpunkte $(a_2 b_2)$ immer zwei entsprechende Punkte zusammenfallend haben, wo auch $\mathfrak{y}_1$ liegen mag. Drittens rückt der Punkt $\mathfrak{x}_2$ immer einmal in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\, a_2)$ hinein, und in diesem Falle gelangt $\mathfrak{y}_2$ in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\, b_2)$, also wird der Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{x}_2,\, \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2)$ mit dem Punkte $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\, b_2)$ identisch, wo auch $\mathfrak{y}_1$ liegen mag; mithin geht der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ immer durch den dritten festen Punkt $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\, b_2)$.

Endlich geht er noch durch einen vierten festen Punkt, denn wo auch der Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 und ihm entsprechend $\mathfrak{y}_1$ auf b_1 liegen mag, der Strahl $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ wird immer einmal in den Strahl b_1 übergehen, folglich $\mathfrak{y}_2$ in den Schnittpunkt $(b_1 b_2)$, mithin $\mathfrak{x}_2$ in den Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{A}_2,\, b_1 b_2|$

mit der Geraden a_2, und dieser Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}_2$ verbunden liefert einen Strahl, welcher b_1 in einem Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$ schneidet.

Bezeichnen wir also zur Abkürzung

$$(b_1 b_2) = \mathfrak{b} \quad (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{b},\ a_2) = \mathfrak{a} \quad (\mathfrak{B}_2 \mathfrak{a},\ b_1) = \mathfrak{B},$$

so ist $\mathfrak{B}$ der vierte feste Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$; dieser beschreibt also ein Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ mit den vier Grundpunkten:

$$\mathfrak{B}_2 \quad (a_2 b_2) \quad (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2,\ b_2) \quad \mathfrak{B},$$

von denen der letzte auf der Geraden b_1, die beiden vorhergehenden auf der Geraden b_2 liegen.

Der Strahl b_1 wird von dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ ausser in dem festen Grundpunkte $\mathfrak{B}$ noch in dem veränderlichen Punkte $\mathfrak{y}_1$ geschnitten, dem Mittelpunkte des zweiten erzeugenden Strahlbüschels; der Punkt $\mathfrak{y}_1$ durchläuft daher auf b_1 eine gerade Punktreihe, die mit dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ projectiv ist. Diese Punktreihe $|\mathfrak{y}_1|$ liegt aber perspectiv mit der von $\mathfrak{x}_1$ auf dem Träger a_1 beschriebenen Punktreihe, ist also auch projectiv mit dem Strahlbüschel, welches der Strahl $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{x}_1| = x$ um den Mittelpunkt $\mathfrak{B}_1$ beschreibt; folglich stehen das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ selbst in projectiver Beziehung, und das Erzeugniss, d. h. der Ort der Schnittpunkte $\mathfrak{z}$ entsprechender Elemente der beiden projectiven Gebilde wird daher nach der *Chasles*schen Definition eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ sein, welche durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels selbst hindurchgeht, w. z. b. w.

Wir hätten auch umgekehrt zuerst den Punkt $\mathfrak{x}_2$ auf a_2 festhalten, dagegen $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 verändern und dann als zweite Veränderung erst die Bewegung von $\mathfrak{x}_2$ auf a_2 eintreten lassen können; dadurch hätten wir ein anderes Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel zur Erzeugung der $C^{(3)}$ erhalten; wir können demnach, wenn wir noch die Schnittpunkte

$$(b_2 b_1) = \mathfrak{b} \quad (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{b},\ a_1) = \mathfrak{a}_1 \quad (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{a}_1,\ b_2) = \mathfrak{B}'$$

bezeichnen, folgende acht Punkte als der $C^{(3)}$ angehörig angeben:

$$\mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{B}_2 \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}'$$

$$(a_1 b_1) \quad (a_2 b_2) \quad (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1,\ b_1) \quad (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2,\ b_2),$$

von denen drei auf der Geraden b_1, drei auf der Geraden b_2 liegen, und die beiden übrigen $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ sind. Ein neunter Punkt der $C^{(3)}$ ist der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}',\ \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}),$$

und durch diese neun Punkte ist die $C^{(3)}$ vollständig bestimmt, weil sechs von ihnen auf einem Geradenpaar, die drei übrigen aber nicht auf einer Geraden liegen.

2. Die zweite *Grassmann*sche Definition, Nr. 2 in der oben angeführten Abhandlung, (dieses Journal, Bd. 36, S. 177) lautet:

„Wenn die Seiten eines veränderlichen (einfachen) Vierecks und eine Diagonale desselben um feste Punkte sich drehen und die (beiden) von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen, so ist der geometrische Ort jeder der beiden (ersten) in der Diagonale liegenden Ecken des Vierecks je eine Curve dritter Ordnung". Unter Abänderung der Bezeichnung sprechen wir diese Definition so aus:

In der Ebene sind gegeben zwei feste Gerade

$$a \quad b$$

und fünf feste Punkte

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C};$$

es soll auf der Geraden a ein Punkt $\mathfrak{x}$, auf der Geraden b ein Punkt $\mathfrak{y}$ so gewählt werden, dass, wenn der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{z}$$

genannt wird, die drei Strahlen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{x}| \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{y}| \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{z}|$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{s}$ schneiden; der Punkt $\mathfrak{s}$ wird dann nach *Grassmann* eine Curve dritter Ordnung beschreiben, denn er erfüllt die geforderten Bedingungen, indem das veränderliche Viereck

$$\mathfrak{x} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{s}$$

seine vier Seiten $|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\,|\mathfrak{z}\mathfrak{y}|\,\mathfrak{y}\mathfrak{s}|\,|\mathfrak{s}\mathfrak{x}|$ und eine Diagonale $|\mathfrak{z}\mathfrak{s}|$ durch die fünf festen Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}$$

gehend und die beiden Ecken $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auf den festen Geraden a und b liegend hat, und sowohl der Ort des Punktes $\mathfrak{s}$, als auch der des Punktes $\mathfrak{z}$ gesucht wird; wir können uns auf den ersteren beschränken; die Ermittelung des Ortes von $\mathfrak{s}$ führt aber geradezu auf die *Chasles*sche Erzeugungsweise.

Halten wir nämlich zuerst den Punkt $\mathfrak{x}$ auf a fest und verändern allein den Punkt $\mathfrak{y}$ auf b, indem wir ihn eine gerade Punktreihe durchlaufen lassen, dann bleiben die Strahlen $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ fest, der Punkt $\mathfrak{z}$ durchläuft eine gerade Punktreihe auf $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}|$, welche mit der von $\mathfrak{y}$ durch-

laufenen Punktreihe projectiv ist, weil sie mit ihr perspectiv liegt in dem Strahlbüschel $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$. Hiernach werden die Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}|$ zwei projective Strahlbüschel beschreiben und einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ erzeugen als Ort des Schnittpunktes $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}, \mathfrak{C}\mathfrak{z})$; und wo dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den festen Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}| = x$ schneidet, da liegt offenbar ein Punkt $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes; es giebt also im Allgemeinen auf dem festgehaltenen Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ zwei Punkte $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes.

Verändern wir nun zweitens den Punkt $\mathfrak{x}$ auf der Geraden a, indem wir ihn eine gerade Punktreihe durchlaufen lassen, so verändert sich mit ihm auch der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}| = x$, indem er ein Strahlbüschel um den Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ beschreibt; es verändert sich aber auch mit ihm der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, und es ist leicht zu sehen, dass derselbe ein Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten beschreibt. In der That geht der von dem Schnittpunkte $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}, \mathfrak{C}\mathfrak{z})$ beschriebene Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ beständig durch die beiden festen Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der erzeugenden Strahlbüschel hindurch; ferner wird, wo auch $\mathfrak{x}$ auf a liegen mag, der Punkt $\mathfrak{y}$ immer einmal in den Schnittpunkt $(b, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1)$ hineinrücken, also da $\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ in einer Geraden liegen, werden $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}|$ und $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}|$ zusammenfallen, d. h. $\mathfrak{z}$ wird auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1|$ liegen; der Schnittpunkt $(\mathfrak{C}\mathfrak{z}, \mathfrak{B}\mathfrak{y})$ wird also der Punkt $(b, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1)$ werden, und der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ muss daher immer durch den dritten festen Punkt

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, b)$$

hindurchgehen.

Endlich wird, wo auch $\mathfrak{x}$ auf a liegen mag, der Punkt $\mathfrak{y}$ immer einmal in die Lage von $(b, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$ gelangen, mithin $\mathfrak{z}$ auf $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und zwar in den Punkt $\mathfrak{A}_1$ hinein fallen, weil $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}|$ in diesem Falle sich in $\mathfrak{A}_1$ schneiden; es wird also für diese besondere Lage $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1|$; $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}| \equiv |\mathfrak{B}, (b, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)|$; bezeichnen wir daher zur Abkürzung den Punkt

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{b},$$

so ist ersichtlich, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ nothwendig immer durch den vierten festen Punkt

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b})$$

hindurchgehen muss, also ein Kegelschnittbüschel mit den vier festen Grundpunkten

$$\mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, b) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b})$$

beschreibt.

Wenn wir durch den Grundpunkt $\mathfrak{B}$ dieses Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ die Gerade nach dem Schnittpunkt (ab) ziehen, so ist der zweite Schnittpunkt dieser Geraden

$$|\mathfrak{B}(ab)|$$

mit dem veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ leicht zu ermitteln.

Sobald nämlich der Punkt $\mathfrak{y}$ in den Schnittpunkt (ab) rückt, wird $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ die feste Gerade $|\mathfrak{B}_1(ab)|$, auf welcher der Punkt $\mathfrak{z}$ sich bewegt, und da $\mathfrak{z}$ gleichzeitig auf dem Strahle $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{z}\mathfrak{x}|$ liegt, so beschreibt $\mathfrak{z}$ eine mit $\mathfrak{x}$, also auch mit dem Strahlbüschel $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ projective Punktreihe; der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ geht aber durch den Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{B}, (ab)|$ mit der Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}|$, und dieser Schnittpunkt beschreibt demgemäss auf der festen Geraden $|\mathfrak{B}, (ab)|$ eine Punktreihe, die mit der von $\mathfrak{z}$ durchlaufenen Punktreihe, also auch mit der von $\mathfrak{x}$ durchlaufenen und endlich auch mit dem von $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}| = x$ beschriebenen Strahlbüschel projectiv ist. Die Punktreihe, welche von dem zweiten Schnittpunkte des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$ mit der durch den Grundpunkt $\mathfrak{B}$ gezogenen Geraden $|\mathfrak{B}, (ab)|$ durchlaufen wird, ist aber projectiv mit dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ selbst, also sind das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ untereinander projectiv, und ihr Erzeugniss, d. h. der Ort des Punktes $\mathfrak{s}$ ist nach der *Chasles*schen Definition eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels hindurchgeht, w. z. b. w. Wir hätten auch umgekehrt zuerst den Punkt $\mathfrak{y}$ auf b festhalten, dagegen $\mathfrak{x}$ auf a verändern und dann als zweite Veränderung erst die Bewegung von $\mathfrak{y}$ auf b eintreten lassen können; dadurch hätten wir ein anderes Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel zur Erzeugung der $C^{(3)}$ erhalten; wir können demnach, wenn wir noch den Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{a}$$

bezeichnen, folgende sieben Punkte als der $C^{(3)}$ angehörig angeben:

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{C}$$

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, a) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, b) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b}) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{a});$$

ferner ergiebt sich als achter Punkt der $C^{(3)}$ der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}, \mathfrak{B}\mathfrak{b});$$

denn bezeichnen wir noch zur Abkürzung die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{a}_1 \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{b}_1,$$

so enthält das Kegelschnittbüschel, dessen vier Grundpunkte $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{b}_1$ $(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b})$ sind, während $\mathfrak{A}$ der Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels ist (Gegenpunkt), einmal das Linienpaar $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1|$, und da $|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1|$ den dritten Curvenpunkt $(\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{a})$ enthält, so muss seine Verbindungslinie mit $\mathfrak{A}$, d. h. $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ auch durch den dritten Curvenpunkt auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ gehen, mithin muss der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}, \mathfrak{B}\mathfrak{b})$$

der $C^{(3)}$ angehören; ferner enthält dasselbe Kegelschnittbüschel auch das Linienpaar $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|$, und der dritte Curvenpunkt auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1|$ ist $\mathfrak{a}_1$, folglich muss seine Verbindungslinie mit $\mathfrak{A}$, d. h. $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ auch durch den dritten Curvenpunkt auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|$ gehen, mithin muss auch

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b}_1)$$

als neunter Punkt der $C^{(3)}$ angehören. Allein diese neun Punkte der $C^{(3)}$ sind noch nicht ausreichend zu ihrer Bestimmung, vielmehr bilden sie eine Gruppe von neun associirten Punkten, nämlich die neun Durchschnittspunkte der drei Geraden

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1| \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}| \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|$$

mit den drei Geraden

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1| \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1| \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}|.$$

Wir können indes leicht noch weitere Punkte der $C^{(3)}$ ermitteln, die dann vollständig zur Bestimmung der Curve ausreichen. Gelangt nämlich $\mathfrak{x}$ in den Schnittpunkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, a)$ und $\mathfrak{y}$ in den Schnittpunkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, b)$, so wird natürlich der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{z} \equiv \mathfrak{x},$$

folglich schneiden sich $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{B}\mathfrak{y}|\,|\mathfrak{C}\mathfrak{z}|$ in demselben Punkte $\mathfrak{s} = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, a)$, welcher der Curve $C^{(3)}$ angehören muss; wir haben also noch die beiden Curvenpunkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, b) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, a)$$

als der $C^{(3)}$ angehörig, wodurch sie dann mehr als bestimmt ist.

3. Wir können noch auf eine zweite Weise zur Ermittelung des Ortes von $\mathfrak{s}$ gelangen durch folgende Betrachtung:

Durch den festen Punkt $\mathfrak{C}$ ziehen wir einen Strahl x und nehmen denselben als Träger einer geraden Punktreihe $\mathfrak{z}$, dieselbe projiciren wir von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ aus auf die Geraden a und b und erhalten die Punkte

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{z}, a) = \mathfrak{x} \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{z}, b) = \mathfrak{y},$$

welche projective Punktreihen auf den Trägern a und b beschreiben, weil sie mit der von $\mathfrak{z}$ beschriebenen Punktreihe perspectiv liegen; der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{B}\mathfrak{y}) = \mathfrak{s}$$

wird daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ beschreiben, der durch die Mittelpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der erzeugenden Strahlbüschel hindurchgeht; wo dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den Strahl x schneidet, da liegen offenbar Punkte $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes.

Drehen wir nun den anfänglichen Strahl x um den festen Punkt $\mathfrak{C}$, so verändert sich mit ihm auch der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, er geht aber ausser durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noch durch zwei weitere feste Punkte; denn da der Strahl x beständig durch $\mathfrak{C}$ geht, so wird, wenn die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{a}_1 \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{b}_1$$

bezeichnet werden, der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b}_1)$$

immer auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ liegen; ferner wird, wenn $\mathfrak{z}$ in die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ hineinrückt, was für jede Lage von x einmal stattfindet, und wir bezeichnen die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, a) = \mathfrak{a} \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1, b) = \mathfrak{b},$$

der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}, \mathfrak{B}\mathfrak{b})$$

immer auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ liegen müssen. Da derselbe durch vier feste Punkte geht, so beschreibt er bei der Bewegung von x ein Kegelschnittbüschel mit den vier festen Grundpunkten

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{a}, \mathfrak{B}\mathfrak{b}) \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{b}_1),$$

und es ist leicht zu erkennen, dass dasselbe in projectiver Beziehung steht mit dem Strahlbüschel $\mathfrak{C}|x|$. Denn trifft der veränderliche Strahl x die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ in $\mathfrak{z}$, so fällt $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ mit $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ zusammen, der Punkt $\mathfrak{y} = (\mathfrak{B}_1\mathfrak{z}, b)$ beschreibt eine mit dem Strahlbüschel $|x|$ projective Punktreihe, $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}|$ ein mit demselben ebenfalls projectives Strahlbüschel und der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{B}\mathfrak{y}) = \mathfrak{s}$ eine mit ihm projective Punktreihe auf dem festen Träger $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$. Diese Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$, welche durch den Grundpunkt $\mathfrak{A}$ des Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ geht, wird also von den Kegelschnitten des Büschels zum zweiten Mal in einer Punktreihe geschnitten, die mit dem Strahlbüschel $|x|$ projectiv ist; folglich sind auch das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ selbst mit einander projectiv und erzeugen daher nach der

*Chasles*schen Definition eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels hindurchgeht, w. z. b. w.

Dass die so erzeugte $C^{(3)}$ auch durch die übrigen, oben (2.) angegebenen Punkte hindurchgeht, ist leicht zu sehen und bedarf keiner weiteren Ausführung; auch können wir noch weitere Punkte der $C^{(3)}$ angeben, z. B. (ab) und $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)$.

4. Die dritte *Grassmann*sche Definition, Nr. 3 in der oben angeführten Abhandlung, (dieses Journal, Bd. 36, S. 178) lautet:

„Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Verbindungslinien mit drei gegebenen Punkten drei gegebene Gerade so schneiden, dass die drei Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen, ist eine Curve dritter Ordnung."

Nehmen wir in der Ebene drei beliebige Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_1$$

und drei beliebige Gerade

$$a \quad b \quad c$$

an, die sich in den Punkten

$$(bc) = \mathfrak{A} \quad (ca) = \mathfrak{B} \quad (ab) = \mathfrak{C}$$

schneiden, und suchen einen Punkt $\mathfrak{x}$ von solcher Beschaffenheit, dass die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{a}_1 \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{b}_1 \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{C}_1, c) = \mathfrak{c}_1$$

in einer Geraden $x = |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$ liegen, dann müssen die vier Geraden

$$a \quad b \quad c \quad x$$

ein vollständiges Vierseit bilden, dessen drei Paar Gegenecken

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{c}_1$$

sind; da nun $|\mathfrak{x}\mathfrak{A}_1|$ durch $\mathfrak{a}_1$, $|\mathfrak{x}\mathfrak{B}_1|$ durch $\mathfrak{b}_1$ und $|\mathfrak{x}\mathfrak{C}_1|$ durch $\mathfrak{c}_1$ gehen soll, so muss der Punkt $\mathfrak{x}$ bekanntlich die Eigenschaft besitzen, nach den drei Punktepaaren

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{C}_1$$

drei Strahlenpaare einer Involution zu senden; da aber diese drei Punktepaare abgesehen von ihrer Zuordnung ganz willkürlich gegeben sind, so kommt die *Grassmann*sche Definition mit der von *Cayley (Liouville,* Journal de mathématiques tome 9, p. 287) ausgesprochenen überein:

„Le lieu d'un point P, qui se meut de telle manière que les lignes menées aux points AA', BB', CC' forment toujours un faisceau en involution, est une courbe du troisième ordre, qui passe par ces six points.“

Diese sechs Punkte, von denen drei die zuerst gegebenen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, die drei anderen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die drei Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden abc sind, bestimmen vollständig die Curve dritter Ordnung, denn in die drei Paare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

geordnet ist jedes ein Paar conjugirter Punkte für die $C^{(3)}$, welches denselben Tangentialpunkt hat (*Hesse:* „Ueber Curven dritter Ordnung“ dieses Journal Bd. 36, S. 151 ff.), und es lässt sich immer aus zwei Paaren ein neues Paar conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ ableiten, z. B. aus $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ das Paar

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}),$$

und umgekehrt liefert jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ mit einem Paar conjugirter Punkte verbunden zwei Strahlen, deren dritte Schnittpunkte mit der $C^{(3)}$ wieder ein Paar conjugirter Punkte sind, u. s. w., wie aus den *Hesse*schen Untersuchungen folgt. Es ist dies zugleich die einfachste Quelle, aus welcher die ganze Theorie der Curven dritter Ordnung sich ableiten lässt, wie es der Verfasser a. a. O. versucht hat. Allein aus der *Grassmann*schen Definition tritt weder die Bedeutung der gegebenen Bestimmungsstücke noch die charakteristische Eigenschaft derselben hervor, auch lässt sich nicht erkennen, wie Punkte des gesuchten Ortes gefunden werden können. Dagegen leuchtet unmittelbar ein, dass die Gerade x, auf welcher die drei Schnittpunkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ liegen, eine Curve dritter Klasse $K^{(3)}$ umhüllen wird bei der Bewegung des Punktes $\mathfrak{x}$, denn die dual gegenüberstehende Erzeugungsweise ist in diesem Fall gerade die Umkehrung der ersteren:

Wenn eine gerade Linie in der Ebene sich so bewegt, dass ihre drei Schnittpunkte mit drei gegebenen Geraden, verbunden mit drei gegebenen Punkten, drei Strahlen liefern, welche durch einen und denselben Punkt gehen, so umhüllt jene Gerade eine Curve dritter Klasse.

5. Wir können auch nach demselben Prinzip, welches wir bei den ersten Zurückführungen (1. und 2.) angewendet haben, die dritte *Grassmann*sche Definition auf die *Chasles*sche Erzeugungsweise zurückführen.

Sind nämlich die Punkte

$$\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_1$$

und die Geraden

$$a \quad b \quad c$$

gegeben, so wird ein Punkt $\mathfrak{s}$ von der Beschaffenheit gesucht, dass die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{s}\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{x} \quad (\mathfrak{s}\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{y} \quad (\mathfrak{s}\mathfrak{C}_1, c) = \mathfrak{z}$$

auf einer Geraden $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}| = x$ liegen, oder anders ausgesprochen, wir sollen auf den Geraden $a\,b\,c$ drei solche in gerader Linie liegende Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ ermitteln, dass die drei Strahlen

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}| \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{z}|$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{s}$ schneiden.

Zu diesem Behufe halten wir zuerst den Punkt $\mathfrak{x}$ auf a fest und drehen um ihn einen Strahl, welcher b und c in $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ treffe; dann beschreiben $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ perspectiv liegende gerade Punktreihen auf b und c, und der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{y}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{z})\ .$$

wird daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ erzeugen; wo dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den festen Strahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}|$ schneidet, da liegen offenbar zwei Punkte $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes.

Verändern wir nun zweitens den Punkt $\mathfrak{x}$ auf der Geraden a, so dass also $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}|$ ein Strahlbüschel beschreibt, so wird sich mit diesem Strahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}| = x$ auch der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ verändern und zwar ein Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten beschreiben; denn er geht offenbar durch die beiden festen Mittelpunkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ der erzeugenden Strahlbüschel, sowie durch den Schnittpunkt

$$(bc) = \mathfrak{A},$$

weil die von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen geraden Punktreihen immer perspectiv liegen, und er geht endlich noch durch einen vierten festen Punkt; denn wo auch immer $\mathfrak{x}$ auf a liegen mag, ein durch $\mathfrak{x}$ gehender Strahl ist allemal a selbst; schneidet also a die Träger b und c in

$$(ab) = \mathfrak{C} \quad (ac) = \mathfrak{B},$$

so ist offenbar

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{B})$$

ein vierter fester Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$; letzterer durchläuft daher ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten

$$\mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_1 \quad \mathfrak{A} \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{B}),$$

während der Strahl $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}| = x$ ein einfaches Strahlbüschel um $\mathfrak{A}_1$ beschreibt.

Es ist nun leicht zu sehen, dass das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ zu dem Strahlbüschel $|x|$ in projectiver Abhängigkeit steht.

Denn wo auch immer $\mathfrak{x}$ auf a liegen mag, der Punkt $\mathfrak{y}$ muss einmal in die Lage des Schnittpunktes $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}, b)$ gelangen, den wir bezeichnen wollen

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}, b) = \mathfrak{b};$$

dann wird aber $|\mathfrak{x}\mathfrak{b}|$ die Gerade c in $\mathfrak{z}$ schneiden, also werden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ perspectiv liegende Punktreihen auf den Trägern a und c beschreiben. Der zu $\mathfrak{x}$ zugehörige Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ wird aber durch den Schnittpunkt $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{z})$ gehen, und dieser beschreibt auf der festen Geraden $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}|$ eine mit $\mathfrak{z}$, also auch mit $\mathfrak{x}$ und daher auch mit x projective Punktreihe. Folglich schneidet das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ die durch den Grundpunkt $\mathfrak{B}_1$ desselben gehende feste Gerade $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}|$ in einer geraden Punktreihe, welche mit dem von dem Strahl x beschriebenen Strahlbüschel projectiv ist, und daher stehen das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ selbst in projectiver Abhängigkeit von einander; sie erzeugen also nach der *Chasles*schen Definition eine Curve dritter Ordnung, welche selbst durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels hindurchgeht, w. z. b. w.

Wir hätten auch, anstatt zuerst den Punkt $\mathfrak{x}$ auf a festzuhalten und um ihn einen veränderlichen Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ zu drehen, zuerst $\mathfrak{y}$ auf b oder $\mathfrak{z}$ auf c festhalten können, um dann in gleicher Weise zu operiren; dadurch hätten wir andere Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel zur Erzeugung derselben $C^{(3)}$ erhalten und als Grundpunkte derselben auch andere Punkte der $C^{(3)}$, nämlich im Ganzen folgende neun:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{B}) & (\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}) & (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}). \end{array}$$

Durch diese neun Punkte ist die Curve $C^{(3)}$ noch nicht vollständig bestimmt; sie bilden vielmehr eine Gruppe von neun associirten Punkten, weil sie zu je dreien auf drei Geraden liegen

$$\begin{array}{l} |\mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C} \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{B})|, \\ |\mathfrak{C}_1 \quad \mathfrak{A} \quad (\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{C})|, \\ |\mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A})|; \end{array}$$

wir können aber leicht noch weitere Punkte der $C^{(3)}$ angeben, nämlich die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, a) \quad (\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1, b) \quad (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, c).$$

wodurch die $C^{(3)}$ mehr als bestimmt ist: denn der Punkt $\mathfrak{s} = (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, a)$ genügt offenbar der geforderten Bedingung, weil für ihn $\mathfrak{x} = (\mathfrak{s}\mathfrak{A}_1, a)$ mit $\mathfrak{s}$ zusammenfällt, $|\mathfrak{s}\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{s}\mathfrak{C}_1|$ in $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ zusammenfallen, also die drei Strahlen $|\mathfrak{x}\mathfrak{A}_1|$ $|\mathfrak{y}\mathfrak{B}_1|$ $|\mathfrak{z}\mathfrak{C}_1|$ sich in der That in $\mathfrak{s}$ schneiden.

Durch diese Zurückführung ist zugleich der Zusammenhang zwischen der *Cayley-Hesse*schen und der *Chasles*schen Erzeugungsweise hergestellt.

Da die $C^{(3)}$ durch diese zwölf Punkte

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A} & \mathfrak{A}_1 & (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{B}) & (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{C}), \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{B}_1 & (\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}) & (\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{A}), \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{C}_1 & (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}) & (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \end{array}$$

bestimmt wird, und dieselben ungeändert bleiben, wenn wir $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{C}$ vertauschen, so erkennen wir auch diese drei Punktepaare als conjugirte Punkte der $C^{(3)}$ und können weitere Eigenschaften der Curve daraus ableiten, wie es a. a. O. geschehen ist.

6. *Grassmann* hat a. a. O. noch einige Erzeugungsweisen der Curve dritter Ordnung angegeben, von denen die vorhin behandelten nur besondere Fälle sind. Auch diese allgemeineren Erzeugungsweisen sind nach demselben Princip auf die *Chasles*sche Erzeugung vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit demselben projectiven Strahlbüschels zurückzuführen.

Unter geringer Veränderung der Bezeichnung lautet die Verallgemeinerung der ersten *Grassmann*schen Erzeugung (dieses Journal Bd. 31, S. 122) so:

Wenn die festen Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2, \quad \ldots \quad \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n$$

und die festen Geraden

$$a\,b, \quad a_1\,b_1, \quad a_2\,b_2, \quad \ldots \quad a_n\,b_n$$

gegeben sind, und ein gesuchter Punkt $\mathfrak{s}$ vermittelst der Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{A}, a) = \mathfrak{x}_1, (\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{A}_1, a_1) = \mathfrak{x}_2, (\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{A}_2, a_2) = \mathfrak{x}_3, \ldots (\mathfrak{x}_{n-1}\,\mathfrak{A}_{n-1}, a_{n-1}) = \mathfrak{x}_n, (\mathfrak{x}_n\,\mathfrak{A}_n, a_n) = \mathfrak{x}.$$

$$(\mathfrak{s}\mathfrak{B}, b) = \mathfrak{y}_1, (\mathfrak{y}_1\mathfrak{B}_1, b_1) = \mathfrak{y}_2, (\mathfrak{y}_2\mathfrak{B}_2, b_2) = \mathfrak{y}_3, \ldots (\mathfrak{y}_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}, b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n, (\mathfrak{y}_n\mathfrak{B}_n, b_n) = \mathfrak{y}$$

zu der Geraden

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = s$$

führt, so wird durch die Bedingung, dass s durch $\mathfrak{S}$ *gehen soll, der Ort von* $\mathfrak{S}$ *auf eine Curve dritter Ordnung* $C^{(3)}$ *und der Ort von s auf eine Curve dritter Klasse* $\mathfrak{K}^{(3)}$ *beschränkt.*

Wir suchen nun auf den Geraden a und b bez. zwei solche Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$, dass, wenn man aus ihnen in der angegebenen Weise die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ableitet, die drei Strahlen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1| \quad |\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$$

durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{S}$ laufen.

Hierzu halten wir zuerst den Punkt $\mathfrak{x}_1$ fest, dann bleibt auch der aus ihm abgeleitete Punkt $\mathfrak{x}$ fest, verändern aber $\mathfrak{y}_1$ auf b, indem wir es eine gerade Punktreihe durchlaufen lassen, dann wird offenbar auch der aus ihm abgeleitete Punkt $\mathfrak{y}$ auf b_n eine projective Punktreihe durchlaufen; also werden $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ und $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ zwei projective Strahlbüschel beschreiben, und der Schnittpunkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}\mathfrak{y})$ wird einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ durchlaufen, welcher durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{x}$, die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlbüschel, hindurchgeht. Wo nun dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| = x$ schneidet, da liegt offenbar ein Punkt $\mathfrak{S}$ des gesuchten Ortes, denn es schneiden sich alsdann drei Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ in einem Punkte $\mathfrak{S}$.

Der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ geht aber ausser durch den Punkt $\mathfrak{B}$ noch durch drei andere feste Punkte; nämlich das Strahlbüschel $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ schneidet die Gerade b_n in einer Punktreihe, die mit der von $\mathfrak{y}$ durchlaufenen projectiv ist; es kommt also im Allgemeinen zweimal vor, dass der Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ durch den Punkt $\mathfrak{y}$ selbst hindurchgeht. Die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ dieser beiden auf b_n incidenten projectiven Punktreihen sind also immer zwei Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$, weil sich in ihnen zwei entsprechende Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ schneiden, wo auch $\mathfrak{x}_1$ und der daraus abgeleitete Punkt $\mathfrak{x}$ liegen mag. Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ conjugirt-imaginär, so werden sie durch eine reell construirbare elliptische Punktinvolution vertreten, die aus den beiden incident liegenden projectiven Punktreihen abzuleiten ist. (S. *Steiners* Vorles., II. Th., S. 80.) Endlich muss, wo auch $\mathfrak{x}$ auf a_n liegen mag, allemal ein Strahl des veränderlichen Strahlbüschels $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ in den Strahl a_n hineinfallen, also wird $\mathfrak{y} = (a_n b_n)$. Diesem entspricht ein bestimmter Punkt $\mathfrak{y}_1''$, der in bestimmter Weise durch das Constructionsschema aus dem Punkt $\mathfrak{y} = (a_n b_n)$ abzuleiten ist; der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ wird daher immer durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}'$ des Strahles $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1''|$ mit a_n hindurchgehen müssen, und enthält somit die vier festen Punkte $\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}'$. Verändern wir nunmehr $\mathfrak{x}_1$ auf a, so

verändert sich zwar der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$; er beschreibt aber ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}'$, während $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| = x$ ein Strahlbüschel um den Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ beschreibt.

Es leuchtet aber auch ein, dass das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ mit dem Strahlbüschel $|x|$ projectiv ist; denn da der feste Grundpunkt $\mathfrak{R}'$ auf der Geraden a_n liegt und auf der letzteren Geraden auch der zweite Schnittpunkt $\mathfrak{x}$, in welchem der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ die Gerade a_n schneidet, so ist das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen Punktreihe projectiv; diese ist aber mit der von $\mathfrak{x}_1$ beschriebenen Punktreihe projectiv, wie aus dem Constructionsschema hervorgeht, also auch mit dem Strahlbüschel $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| \equiv |x|$. Das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ ist daher mit dem Strahlbüschel $|x|$ projectiv, und die Schnittpunkte entsprechender Elemente der beiden projectiven Gebilde erzeugen daher eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, den gesuchten Ort des Punktes $\mathfrak{s}$.

Die $C^{(3)}$ geht bekanntlich durch die vier Grundpunkte des erzeugenden Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels. Vertauschen wir $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ und stellen die analoge Betrachtung an, so erhalten wir folgende acht Punkte der $C^{(3)}$:

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{P} \text{ und } \mathfrak{Q} \text{ (auf } b_n),\quad \mathfrak{R}' \text{ (auf } a_n)$$
$$\mathfrak{B},\quad \mathfrak{P}' \text{ und } \mathfrak{Q}' \text{ (auf } a_n),\quad \mathfrak{R} \text{ (auf } b_n),$$

durch welche die $C^{(3)}$ noch nicht vollständig bestimmt ist.

Wir erhalten aber sofort einen neunten Punkt der Curve, wenn wir in dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}']$, dessen Gegenpunkt $\mathfrak{A}$ ist, den in das Linienpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|\ |\mathfrak{B}\mathfrak{R}'|$ ausgearteten Kegelschnitt auffassen; ihm muss der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{R}|$ entsprechen, weil $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}| \equiv b_n$ zum dritten Mal in $\mathfrak{R}$ der $C^{(3)}$ begegnet, folglich ist auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{R},\, \mathfrak{B}\mathfrak{R}') = \mathfrak{S}$$

ein Punkt der $C^{(3)}$, und nun haben wir neun Punkte der $C^{(3)}$, die zu ihrer Bestimmung ausreichen; denn sie bilden *keine* Gruppe von neun associirten Punkten, weil $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ auf der Geraden b_n, $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ auf a_n liegen, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ aber nicht auf einer Geraden liegen können.

Dass die Gerade $\mathfrak{s}$ eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllt, folgt aus der Umkehrung der vorigen Betrachtung, welche zugleich die ihr dualistisch gegenüberstehende ist.

7. Die Verallgemeinerung der zweiten und dritten *Grassmann*schen

Erzeugungsweise (dieses Journal, Bd. 36, S. 181) zerfällt in zwei Arten, deren erste unter Abänderung der Bezeichnung so lautet:

Wenn die festen Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2,\quad \dots\quad \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n\mathfrak{C}_n$$

und die festen Geraden

$$a\,b\,c,\quad a_1\,b_1\,c_1,\quad a_2\,b_2\,c_2,\quad \dots\quad a_n\,b_n\,c_n$$

gegeben sind, und ein gesuchter Punkt $\mathfrak{s}$ *vermittelst der Schnittpunkte*

$$\begin{array}{llll}(\mathfrak{s}\mathfrak{A}, a) = \mathfrak{x}_1, & (\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1, a_1) = \mathfrak{x}_2, \quad \dots & (\mathfrak{x}_{n-1}\mathfrak{A}_{n-1}, a_{n-1}) = \mathfrak{x}_n, & (\mathfrak{x}_n\mathfrak{A}_n, a_n) = \mathfrak{x},\\ (\mathfrak{s}\mathfrak{B}, b) = \mathfrak{y}_1, & (\mathfrak{y}_1\mathfrak{B}_1, b_1) = \mathfrak{y}_2, \quad \dots & (\mathfrak{y}_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}, b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n, & (\mathfrak{y}_n\mathfrak{B}_n, b_n) = \mathfrak{y}.\\ (\mathfrak{s}\mathfrak{C}, c) = \mathfrak{z}_1, & (\mathfrak{z}_1\mathfrak{C}_1, c_1) = \mathfrak{z}_2, \quad \dots & (\mathfrak{z}_{n-1}\mathfrak{C}_{n-1}, c_{n-1}) = \mathfrak{z}_n, & (\mathfrak{z}_n\mathfrak{C}_n, c_n) = \mathfrak{z}\end{array}$$

zu den drei Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ *führt, so wird durch die Bedingung, dass* $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ *auf einer Geraden s liegen sollen, der Ort von* $\mathfrak{s}$ *auf eine Curve dritter Ordnung* $C^{(3)}$ *und der Ort der zugehörigen Geraden s auf eine Curve dritter Klasse* $\mathfrak{K}^{(3)}$ *beschränkt.*

Wir erhalten die sämmtlichen Geraden in der Ebene, indem wir zuerst den Punkt $\mathfrak{x}$ auf a_n festhalten und um ihn eine Gerade drehen, sodann $\mathfrak{x}$ die ganze Gerade a_n durchlaufen lassen und jedesmal die vorige Operation wiederholen. Bei der ersten Bewegung beschreiben $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ zwei perspectiv liegende Punktreihen auf den Trägern b_n und c_n, während der Punkt $\mathfrak{x}$ auf a_n fest bleibt. Aus den Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ gehen aber die Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$ durch das Constructionsschema hervor:

$$\begin{array}{lll}(\mathfrak{x}\mathfrak{A}_n, a_{n-1}) = \mathfrak{x}_n, & (\mathfrak{x}_n\mathfrak{A}_{n-1}, a_{n-2}) = \mathfrak{x}_{n-1}, \quad \dots & (\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{x}_1,\\ (\mathfrak{y}\mathfrak{B}_n, b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n, & (\mathfrak{y}_n\mathfrak{B}_{n-1}, b_{n-2}) = \mathfrak{y}_{n-1}, \quad \dots & (\mathfrak{y}_2\mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{y}_1,\\ (\mathfrak{z}\mathfrak{C}_n, c_{n-1}) = \mathfrak{z}_n, & (\mathfrak{z}_n\mathfrak{C}_{n-1}, c_{n-2}) = \mathfrak{z}_{n-1}, \quad \dots & (\mathfrak{z}_2\mathfrak{C}_1, c) = \mathfrak{z}_1,\end{array}$$

mithin bleibt mit $\mathfrak{x}$ auch der Punkt $\mathfrak{x}_1$ fest, während $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ auf den Trägern b und c Punktreihen durchlaufen, die mit den von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ durchlaufenen projectiv sind, also auch unter einander; die Strahlen $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1|$ beschreiben also zwei projective Strahlbüschel und erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, welcher den Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| = x$ in Punkten $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes treffen wird, weil in diesen sich drei entsprechende Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1|$ begegnen. Wir erhalten also auf jedem durch $\mathfrak{A}$ gezogenen Strahl x zwei Punkte $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes als die Schnittpunkte mit einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, der durch die Mittelpunkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der ihn erzeugenden Strahlbüschel hindurchgeht.

Verändern wir nun den Punkt $\mathfrak{x}$ auf a_n, so verändert sich mit ihm auch $\mathfrak{x}_1$ und beschreibt eine mit der von $\mathfrak{x}$ durchlaufenen projective Punktreihe auf dem Träger a, also $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| = x$ ein mit der Punktreihe $(\mathfrak{x})$ projectives Strahlbüschel. Gleichzeitig verändert sich aber auch der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$; dieser geht ausser durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ noch durch zwei weitere feste Punkte. Da nämlich die von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen Punktreihen allemal perspectiv liegen, so fallen in den Schnittpunkt ihrer Träger

$$(b_n, c_n) = \mathfrak{a}$$

immer zwei entsprechende Punkte zusammen; die aus $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}$ durch das Constructionsschema abgeleiteten Punkte $\mathfrak{y}_1^{\mathfrak{a}} \mathfrak{z}_1^{\mathfrak{a}}$ liefern also mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verbunden ein Paar Strahlen, deren Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^{\mathfrak{a}}, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{P}$$

immer dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ angehören wird.

Andrerseits giebt es in jedem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ ist, einen Strahl, nämlich a_n, der allen solchen Strahlbüscheln gemeinschaftlich ist; bezeichnen wir also die Schnittpunkte

$$(a_n b_n) = \mathfrak{c} \quad (a_n c_n) = \mathfrak{b}$$

und nehmen $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}$, so werden die aus ihnen durch das Constructionsschema abgeleiteten Punkte $\mathfrak{y}_1^{\mathfrak{c}}$ und $\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{b}}$ bez. mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verbunden einen Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^{\mathfrak{c}}, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{Q}$$

liefern, der offenbar immer dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ angehören muss. Dieser kann sich daher nur in der Weise verändern, dass er ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ beschreibt, während x um $\mathfrak{A}$ ein Strahlbüschel beschreibt.

Es ist aber auch leicht zu sehen, dass das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ in projectiver Beziehung zu einander stehen. Denn halten wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$ auf b_n fest und drehen um ihn einen Strahl, welcher in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ den Geraden a_n und c_n begegnet, so beschreiben $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ perspectiv liegende, also projective Punktreihen; von den durch das Constructionsschema aus $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ abgeleiteten Punkten $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$ bleibt $\mathfrak{y}_1$ fest, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ beschreiben aber gerade Punktreihen, die mit den von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen, also auch unter einander projectiv sind; $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ ist nun ein Strahl des Strahlbüschels $|x|$ und der Schnittpunkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1)$ ein Punkt des zugehörigen Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$, welcher den festen Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ in dem Grund-

punkt $\mathfrak{B}$ und dem veränderlichen Punkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1)$ schneidet; das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ ist bekanntlich projectiv mit einer Punktreihe, die auf einem durch den Grundpunkt $\mathfrak{B}$ gezogenen festen Strahl von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird, also sind auch das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $|x|$ unter sich projectiv. Die Schnittpunkte entsprechender Elemente der beiden projectiven Gebilde erzeugen daher eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, den Ort des gesuchten Punktes $\mathfrak{s}$.

Die Curve $C^{(3)}$ geht durch die Grundpunkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{A}$; vertauschen wir $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$, oder $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{z}$ und führen dieselbe Construction aus, so erhalten wir andere erzeugende Büschel und andere Grundpunkte, nämlich, wenn wir bezeichnen

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^a, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^a) = \mathfrak{P} \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^b, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^b) = \mathfrak{P}' \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^c, \mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^c) = \mathfrak{P}''$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^c, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^b) = \mathfrak{Q} \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^a, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^c) = \mathfrak{Q}' \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^b, \mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^a) = \mathfrak{Q}'',$$

so sind die Grundpunkte

des ersten	Büschels	$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$	und der Gegenpunkt $\mathfrak{A}$,
- zweiten	-	$\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$	- - - - - $\mathfrak{B}$,
- dritten	-	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''$	- - - - - $\mathfrak{C}$;

wir erkennen aber aus der vorigen Bezeichnung, dass folgende je drei Punkte immer in einer Geraden liegen müssen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'' \quad \mathfrak{B}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \quad \mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}',$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}'\mathfrak{P}'' \quad \mathfrak{B}\mathfrak{Q}''\mathfrak{P} \quad \mathfrak{C}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}',$$

und hieraus sehen wir, dass die neun Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \quad \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'' \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$$

noch nicht ausreichend sind zur Bestimmung der $C^{(3)}$, vielmehr eine Gruppe von neun associirten Punkten bilden, weil sie die Durchschnittspunkte der in der ersten Reihe stehenden drei Geraden mit den in der zweiten Reihe stehenden drei Geraden sind. Wir können indessen leicht noch weitere Punkte der $C^{(3)}$ ermitteln, mit deren Hülfe dann die Curve vollständig bestimmt ist. Wählen wir aus dem Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q})[\mathfrak{X}^{(2)}]$ denjenigen besonderen Kegelschnitt, welcher aus dem Linienpaar $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$ besteht, so werden wir den ihm zugehörigen Strahl $x = |\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ dadurch erhalten, dass wir für

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{z}_1 = (bc)$$

wählen, weil in diesem Falle die beiden $\mathfrak{X}^{(2)}$ erzeugenden Strahlbüschel per-

spective Lage haben müssen. Aus den Punkten $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{z}_1 = (bc)$ werden dann durch das Constructionsschema die Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ abgeleitet, ihre Verbindungslinie schneidet a_n in $\mathfrak{x}$, und aus dem Punkte $\mathfrak{x}$ wird wiederum durch das Constructionsschema rückwärts der Punkt $\mathfrak{x}_1$ abgeleitet; seine Verbindungslinie mit $\mathfrak{A}$ liefert den zugehörigen Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| = x$, welcher das Linienpaar $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$ in zwei neuen Punkten $\mathfrak{s}$ schneidet, die der $C^{(3)}$ angehören; auf diese Weise erhält man im Ganzen sechs neue Punkte und hat also mit den vorigen mehr, als zur Bestimmung der Curve nothwendig sind.

Dass die Gerade s, welche den Forderungen der Aufgabe genügt, eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllt, folgt aus der Umkehrung der vorigen Betrachtung, welche zugleich die ihr dualistisch gegenüberstehende ist.

8. Die zweite Art der *Grassmann*schen Verallgemeinerung kann in folgender Weise ausgesprochen werden:

Wenn die festen Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2,\quad \dots\quad \mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}\mathfrak{C}_{n-1},\quad \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n\mathfrak{C}_n$$

und die festen Geraden

$$a\ b\ c,\quad a_1\ b_1\ c_1,\quad a_2\ b_2\ c_2,\quad \dots\quad a_{n-1}\ b_{n-1}\ c_{n-1}$$

gegeben sind und ein gesuchter Punkt $\mathfrak{s}$ vermittelst der Schnittpunkte

$$(\mathfrak{s}\mathfrak{A}, a) = \mathfrak{x}_1,\quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1, a_1) = \mathfrak{x}_2,\quad \dots\quad (\mathfrak{x}_{n-1}\mathfrak{A}_{n-1}, a_{n-1}) = \mathfrak{x}_n,$$
$$(\mathfrak{s}\mathfrak{B}, b) = \mathfrak{y}_1,\quad (\mathfrak{y}_1\mathfrak{B}_1, b_1) = \mathfrak{y}_2,\quad \dots\quad (\mathfrak{y}_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}, b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n,$$
$$(\mathfrak{s}\mathfrak{C}, c) = \mathfrak{z}_1,\quad (\mathfrak{z}_1\mathfrak{C}_1, c_1) = \mathfrak{z}_2,\quad \dots\quad (\mathfrak{z}_{n-1}\mathfrak{C}_{n-1}, c_{n-1}) = \mathfrak{z}_n$$

zu den drei Punkten $\mathfrak{x}_n\mathfrak{y}_n\mathfrak{z}_n$ führt, so wird durch die Bedingung, dass die drei Strahlen

$$|\mathfrak{A}_n\mathfrak{x}_n|\quad |\mathfrak{B}_n\mathfrak{y}_n|\quad |\mathfrak{C}_n\mathfrak{z}_n|$$

sich in einem und demselben Punkte $\mathfrak{s}'$ schneiden sollen, der Ort von $\mathfrak{s}$ auf eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ und ebenso der Ort von $\mathfrak{s}'$ auf eine zweite Curve dritter Ordnung $C^{(3)'}$ beschränkt.

Um Punkte $\mathfrak{s}$ des gesuchten Ortes zu erhalten, bedienen wir uns desselben vorhin angewendeten Prinzips. Wir ziehen nämlich durch $\mathfrak{A}_n$ einen beliebigen Strahl x und halten denselben zuerst fest, bewegen aber auf ihm einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{s}'$, der eine gerade Punktreihe auf x durchläuft; dann werden $|\mathfrak{B}_n\mathfrak{s}'|$ und $|\mathfrak{C}_n\mathfrak{s}'|$ zwei perspectiv liegende, also projective Strahlbüschel beschreiben, während $(\mathfrak{A}_n\mathfrak{s}') = x$ fest bleibt; nun

folgen aus $\mathfrak{S}'$ rückwärts vermittelst des Constructionsschemas die Punkte:

$$(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}', a_{n-1}) = \mathfrak{x}_n, \quad (\mathfrak{x}_n \mathfrak{A}_{n-1}, a_{n-2}) = \mathfrak{x}_{n-1}, \quad (\mathfrak{x}_{n-1} \mathfrak{A}_{n-2}, a_{n-3}) = \mathfrak{x}_{n-2}, \ldots (\mathfrak{x}_2 \mathfrak{A}_1, a) = \mathfrak{x}_1,$$
$$(\mathfrak{B}_n\mathfrak{S}', b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n, \quad (\mathfrak{y}_n \mathfrak{B}_{n-1}, b_{n-2}) = \mathfrak{y}_{n-1}, \quad (\mathfrak{y}_{n-1} \mathfrak{B}_{n-2}, b_{n-3}) = \mathfrak{y}_{n-2}, \ldots (\mathfrak{y}_2 \mathfrak{B}_1, b) = \mathfrak{y}_1,$$
$$(\mathfrak{C}_n\mathfrak{S}', c_{n-1}) = \mathfrak{z}_n, \quad (\mathfrak{z}_n \mathfrak{C}_{n-1}, c_{n-2}) = \mathfrak{z}_{n-1}, \quad (\mathfrak{z}_{n-1} \mathfrak{C}_{n-2}, c_{n-3}) = \mathfrak{z}_{n-2}, \ldots (\mathfrak{z}_2 \mathfrak{C}_1, c) = \mathfrak{z}_1,$$

und bei der Bewegung von $\mathfrak{S}'$ bleibt der Punkt $\mathfrak{x}_n$, also auch der aus ihm abgeleitete Punkt $\mathfrak{x}_1$ fest, während $\mathfrak{y}_n$ und $\mathfrak{z}_n$, also auch die aus ihnen abgeleiteten Punkte $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ projective Punktreihen beschreiben; der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{S}$$

beschreibt daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, der durch die Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der beiden erzeugenden Strahlbüschel hindurchgeht. Wo nun dieser Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ den festen Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ schneidet, da liegen offenbar zwei Punkte $\mathfrak{S}$ des gesuchten Ortes, denn in einem solchen Punkte werden sich die drei Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$ $|\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1|$ treffen.

Lassen wir nun eine zweite Bewegung in die Figur eintreten, indem wir den Strahl x um den gegebenen Punkt $\mathfrak{A}_n$ drehen, also ein Strahlbüschel beschreiben lassen, wiederholen aber jedesmal die vorige Bewegung, so wird sich mit dem Strahl x auch der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ verändern; derselbe geht indessen ausser durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ noch durch zwei weitere feste Punkte; denn da die beiden von $|\mathfrak{B}_n\mathfrak{S}'|$ und $|\mathfrak{C}_n\mathfrak{S}'|$ beschriebenen Strahlbüschel allemal perspectiv liegen, so fallen auf $|\mathfrak{B}_n\mathfrak{C}_n|$ immer zwei entsprechende Strahlen der perspectiven Strahlbüschel zusammen; bezeichnen wir also die Verbindungslinie

$$|\mathfrak{B}_n\mathfrak{C}_n| = A,$$

so schneidet A die beiden Träger b_{n-1} und c_{n-1} allemal in zwei entsprechenden Punkten $(Ab_{n-1}) = \mathfrak{y}_n$, $(Ac_{n-1}) = \mathfrak{z}_n$, aus denen durch das Constructionsschema wieder zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{y}_1^A$ und $\mathfrak{z}_1^A$ hervorgehen, und der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^A, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^A) = \mathfrak{P}$$

wird daher immer ein Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$ sein. Andererseits wird, wie sich auch der Strahl x um $\mathfrak{A}_n$ drehen mag, der auf ihm veränderliche Punkt $\mathfrak{S}'$ immer einmal in die Lage von $\mathfrak{A}_n$ selbst gelangen, folglich werden

$$|\mathfrak{B}_n\mathfrak{A}_n| = C \quad \text{und} \quad |\mathfrak{C}_n\mathfrak{A}_n| = B$$

immer ein Paar entsprechende Strahlen der beiden perspectiven Strahlbüschel $(\mathfrak{B}_n)$ und $(\mathfrak{C}_n)$ sein; aus diesen gehen die Punkte $(C, b_{n-1}) = \mathfrak{y}_n$,

$(B, c_{n-1}) = \mathfrak{z}_n$ und aus $\mathfrak{y}_n$ und $\mathfrak{z}_n$ durch das Constructionsschema die Punkte $\mathfrak{y}_1^C$ und $\mathfrak{z}_1^B$ hervor, die bez. mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verbunden einen Schnittpunkt

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^C, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^B) = \mathfrak{Q}$$

liefern, der offenbar immer dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ angehören muss.

Der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ beschreibt also bei der zweiten Bewegung ein Büschel mit den vier festen Grundpunkten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, während $\mathfrak{x}_n$, also auch der aus ihm durch das Constructionsschema abgeleitete Punkt $\mathfrak{x}_1$ eine gerade Punktreihe auf a, also $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ ein Strahlbüschel $|X|$ beschreibt.

Das Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q})[\mathfrak{X}^{(2)}]$ und das Strahlbüschel $\mathfrak{A}|X|$ stehen, wie leicht zu sehen ist, in projectiver Abhängigkeit von einander; denn halten wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}_n$ auf b_{n-1} fest, ziehen $|\mathfrak{B}_n\mathfrak{y}_n|$ und bewegen auf diesem Träger einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{s}'$, so werden $|\mathfrak{A}_n\mathfrak{s}'|$ und $|\mathfrak{C}_n\mathfrak{s}'|$ perspective Strahlbüschel, also $\mathfrak{x}_n$ und $\mathfrak{z}_n$ projective Punktreihen und die aus ihnen durch das Constructionsschema abgeleiteten Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ ebenfalls projective Punktreihen beschreiben, während $\mathfrak{y}_1$ fest bleibt; der Schnittpunkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1)$ ist aber der zweite Schnittpunkt (ausser $\mathfrak{B}$) des veränderlichen Kegelschnitts $\mathfrak{X}^{(2)}$ mit dem festen Strahl $|\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1|$, beschreibt daher eine gerade Punktreihe, die mit dem Kegelschnittbüschel selbst projectiv ist, und da der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ ein mit der Punktreihe $\mathfrak{z}_1$ projectives Strahlbüschel beschreibt, so wird das Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q})[\mathfrak{X}^{(2)}]$ mit dem Strahlbüschel $(\mathfrak{A})|X|$ in projectiver Beziehung stehen.

Die Schnittpunkte entsprechender Elemente der beiden projectiven Gebilde erzeugen daher eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, den Ort des gesuchten Punktes $\mathfrak{s}$.

Die Curve $C^{(3)}$ geht durch die Grundpunkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{A}$; vertauschen wir $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{B}_n$, oder $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{C}_n$ und führen dieselbe Construction aus, so erhalten wir andere erzeugende Büschel und andere Grundpunkte derselben, nämlich, wenn wir bezeichnen

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^A, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^A) = \mathfrak{P}, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^B, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^B) = \mathfrak{P}', \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^C, \mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^C) = \mathfrak{P}'',$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^C, \mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^B) = \mathfrak{Q}, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1^A, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^C) = \mathfrak{Q}', \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1^B, \mathfrak{B}\mathfrak{y}_1^A) = \mathfrak{Q}'',$$

so sind die Grundpunkte

des ersten	Büschels	$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,)$	und der Gegenpunkt	$\mathfrak{A}$;
- zweiten	-	$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}')$	- - -	$\mathfrak{B}$,
- dritten	-	$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}'')$	- - -	$\mathfrak{C}$;

wir erkennen aber aus der obigen Bezeichnung, dass immer folgende je drei Punkte auf einer Geraden liegen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'' \quad \mathfrak{B}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \quad \mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}',$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}' \quad \mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'' \quad \mathfrak{C}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q},$$

und sehen daraus, dass die neun Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \quad \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'' \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$$

nicht zur Bestimmung der $C^{(3)}$ ausreichen, vielmehr eine Gruppe von neun associirten Punkten bilden, weil sie die Durchschnittspunkte der drei in der ersten Reihe stehenden Geraden mit den drei in der zweiten Reihe stehenden Geraden sind.

Wir können indessen leicht noch weitere Punkte der $C^{(3)}$ ermitteln, mit deren Hülfe dann die Curve vollständig bestimmt ist. Dies geschieht in ganz gleicher Weise wie in dem vorigen Fall (Nr. 7) und braucht also nicht wiederholt zu werden. Auch ist unmittelbar durch Umkehrung ersichtlich, dass der Punkt $\mathfrak{z}'$ ebenso eine Curve dritter Ordnung beschreibt wie $\mathfrak{z}$. Die dual gegenüberstehende Erzeugungsweise führt zu zwei Curven dritter Klasse.

Breslau, im Juli 1888.

Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt.

(Von Herrn *F. Rudio* in Zürich.)

In einer im 95. Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung habe ich mich mit denjenigen Flächen beschäftigt, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind, und namentlich gezeigt, wie mit Hülfe derselben auf elementare Weise die *Jacobi*sche Integration der Differentialgleichungen der auf den Flächen zweiten Grades befindlichen geodätischen Linien gewonnen werden kann. (Vergl. auch *Cayley*, „On *Rudio*'s inverse centro-surface," Quarterly Journal Bd. 22.)

Die in jener Abhandlung hergeleiteten Resultate reichen nun auch vollständig aus zur Untersuchung der *Mittelpunktsflächen* derjenigen Strahlensysteme vierter Ordnung und vierter Klasse, deren Brennflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. In der That, die beiden confocalen Flächen zweiten Grades seien gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1,\quad \frac{x^2}{a-\mu}+\frac{y^2}{b-\mu}+\frac{z^2}{c-\mu}=1.$$

Man wähle einen beliebigen Punkt P der Fläche (λ) mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den elliptischen Coordinaten u, v aus. Dann ist

$$x^2=(a-\lambda)\frac{(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)},\quad y^2=(b-\lambda)\frac{(b-u)(b-v)}{(b-c)(b-a)},\quad z^2=(c-\lambda)\frac{(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}.$$

Durch P gehen nun zwei gerade Linien, welche die beiden Flächen (λ) und (μ) berühren. Eine von diesen gemeinschaftlichen Tangenten wähle man aus, ihr Berührungspunkt mit der Fläche (μ) sei P_1. Bezeichnet man dann den Abstand der beiden conjugirten Punkte P und P_1 mit r und die Richtungscosinus der Geraden PP_1 mit ξ, η, ζ, so gelten die Formeln

$$r=\frac{u-v}{U-V},\quad \xi=x\left(\frac{U}{a-u}\,\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{a-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right),$$

$$\eta=y\left(\frac{U}{b-u}\,\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{b-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right),\quad \zeta=z\left(\frac{U}{c-u}\,\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{c-v}\,\frac{\mu-v}{u-v}\right),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$U = \sqrt{\frac{(a-u)(b-u)(c-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}}, \quad V = \sqrt{\frac{(a-v)(b-v)(c-v)}{(\lambda-v)(\mu-v)}}.$$

Die Formeln für ξ, η, ζ, welche Herr *Cayley* in der oben citirten Arbeit erwähnt, sind besser durch die hier entwickelten zu ersetzen.

Die Gleichungen der Mittelpunktsfläche des zu den beiden Flächen (λ) und (μ) gehörigen Strahlensystems lauten jetzt

$$x' = x + \tfrac{1}{2}r\xi, \quad y' = y + \tfrac{1}{2}r\eta, \quad z' = z + \tfrac{1}{2}r\zeta,$$

wodurch also die Coordinaten x', y', z' eines beliebigen Punktes der gedachten Fläche als algebraische Functionen zweier unabhängigen Variabeln u und v dargestellt sind.

Indem ich auf eine genauere Untersuchung dieser Flächen bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen gedenke, will ich hier nur einen ganz speciellen Fall herausgreifen, der seiner ausserordentlichen Einfachheit wegen vielleicht allgemeineres Interesse beanspruchen kann.

Zu den von mir in meiner Inauguraldissertation und dann später in der oben erwähnten Abhandlung studirten Flächen gehört nämlich auch als äusserster Specialfall die *Dupin*sche Cyklide, deren Krümmungsmittelpunktsflächen bekanntlich in die beiden Focalkegelschnitte eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades degeneriren. Es entspringt daher die Aufgabe, die Mittelpunktsfläche desjenigen speciellen Strahlensystems vierter Ordnung und vierter Klasse zu bestimmen, dessen Brennflächen sich auf jene beiden Focalkegelschnitte reduciren. Diese Fläche wird aber durch eine sehr elementare Construction gewonnen.

Seien die beiden Focalkegelschnitte, von denen die Ellipse in der XY-Ebene, die Hyperbel in der XZ-Ebene liegen mag, durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Focalhyperbel mit allen Punkten der Focalellipse, so bilden die Mittelpunkte aller dieser Verbindungslinien eine zu der Focalellipse ähnliche Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$. In der Ebene dieser letzteren befindet sich aber noch eine zweite, dazu congruente Ellipse, welche ebenfalls auf der zu construirenden Fläche liegt und von dem zu P symmetrisch gelegenen Hyperbelpunkte herrührt. Jede zur XY-Ebene parallele Ebene schneidet also aus unserer Fläche ein Paar con-

gruenter, zur Focalellipse ähnlicher Ellipsen mit den Halbaxen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ aus. Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, dass die beiden congruenten Ellipsen, welche von der Ebene $z = k$ aus der Fläche ausgeschnitten werden, sich in zwei reellen, von einander verschiedenen Punkten der YZ-Ebene treffen, solange k sich zwischen $-\frac{b^2}{2c}$ und $+\frac{b^2}{2c}$ befindet. Insbesondere schneidet die XY-Ebene aus der Fläche zwei congruente Ellipsen aus, die sich in den beiden Punkten $y = \pm\frac{b^2}{2a}$ der Y-Axe begegnen. Für $k = \pm\frac{b^2}{2c}$ berühren sich die beiden Ellipsen der zwei entsprechenden Paare in den Punkten $z = \pm\frac{b^2}{2c}$ der Z-Axe; für $|k| > \frac{b^2}{2c}$ sind die Ellipsen eines Paares vollständig von einander getrennt. Da die Mittelpunkte aller der erwähnten zu einander congruenten und parallelen Ellipsen auf der zur Focalhyperbel ähnlichen Hyperbel $\frac{x^2}{(\frac{1}{2}c)^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{2}b)^2} = 1$ liegen, so kann die Fläche durch die Bewegung einer Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ erzeugt werden, deren Mittelpunkt diese Hyperbel durchläuft, während ihre Axen parallel den entsprechenden Axen der Focalellipse bleiben.

Die Fläche kann aber auch noch auf eine zweite Art erzeugt werden, die natürlich eine Folge der ersten Erzeugungsart ist, indem man umgekehrt die Focalhyperbel der Reihe nach von den einzelnen Ellipsenpunkten aus projicirt und jedesmal die Erzeugenden des projicirenden Kegels halbirt. Man erkennt dann sofort, dass jede zur XZ-Ebene parallele Ebene aus der Fläche ein Paar congruenter Hyperbeln ausschneidet, die zur Focalhyperbel ähnlich sind. Die beiden congruenten Hyperbeln, welche von der Fläche $y = k$ aus der Fläche ausgeschnitten werden, treffen sich in zwei reellen, von einander verschiedenen Punkten der YZ-Ebene, solange k sich zwischen $-\frac{b^2}{2a}$ und $+\frac{b^2}{2a}$ befindet. So schneidet insbesondere die XZ-Ebene aus der Fläche zwei congruente Hyperbeln aus, welche sich in den beiden Punkten $z = \pm\frac{b^2}{2c}$ der Z-Axe begegnen. Für $k = \pm\frac{b^2}{2a}$ berühren sich die beiden Hyperbeln der zwei entsprechenden Paare in den Punkten $y = \pm\frac{b^2}{2a}$ der Y-Axe. Nimmt endlich k die Werthe von $\frac{b^2}{2a}$ bis $\frac{1}{2}b$, oder von $-\frac{b^2}{2a}$ bis $-\frac{1}{2}b$ an, so haben die Hyperbeln eines Paares keine reellen Schnittpunkte mehr, sie nähern sich einander unaufhörlich und fallen für $k = \pm\frac{1}{2}b$ vollständig zusammen, sodass die beiden Ebenen $y = +\frac{1}{2}b$ und $y = -\frac{1}{2}b$ die Fläche längs

je einer Hyperbel berühren. Diese beiden Hyperbeln entsprechen den Scheiteln der kleinen Axe der Focalellipse als Projectionscentren und sind zugleich der Ort der Scheitel der kleinen Axen der oben besprochenen Ellipsenpaare. Die ganze Fläche liegt zwischen den beiden Ebenen $y = \pm\frac{1}{2}b$. Da die Mittelpunkte aller der erwähnten zu einander congruenten und parallelen Hyperbeln auf der zur Focalellipse ähnlichen Ellipse $\frac{x^2}{(\frac{1}{2}a)^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{2}b)^2} = 1$ liegen, so kann die Fläche durch die Bewegung einer Hyperbel mit den Halbaxen $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}b$ erzeugt werden, deren Mittelpunkt diese Ellipse durchläuft, während ihre Axen parallel den entsprechenden Axen der Focalhyperbel bleiben.

Um endlich die Gleichung der Fläche zu erhalten, wähle man auf der Focalellipse den Punkt P_1 mit den Coordinaten x_1, y_1, auf der Focalhyperbel den Punkt P_2 mit den Coordinaten x_2, z_2 und eliminire aus den Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}y_1, \quad z = \tfrac{1}{2}z_2, \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{c^2}-\frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

die Grössen x_1, y_1, x_2, z_2. Das Resultat der einfachen Rechnung lautet

$$(4a^2y^2+4c^2z^2-b^4)^2 = 8b^2x^2(a^2b^2+b^2c^2-2b^2x^2-4a^2y^2+4c^2z^2).$$

Die Gleichung ist also von der Form $\varphi^2 = 4p^2\psi$ (Vergl. *Kummer*, dieses Journal, Bd. 64.) und stellt daher eine Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt dar. Dieser in der YZ-Ebene gelegene Kegelschnitt — der Ort der Schnittpunkte der oben besprochenen Ellipsenpaare resp. Hyperbelpaare — ist die Ellipse

$$4a^2y^2+4c^2z^2-b^4 = 0$$

mit den Halbaxen $\frac{b^2}{2a}$ und $\frac{b^2}{2c}$, wie auch aus der oben gegebenen Construction der Fläche folgt.

Zürich, den 8. December 1887.

Das Potential homogener ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt.

(Von Herrn *Züge* in Lingen.)

Ringkörper sollen im Folgenden solche Körper genannt werden, die man sich durch Rotation eines ebenen begrenzten Flächenstücks um eine dasselbe nicht schneidende Gerade — die Ringaxe — entstanden denken kann.

Um das Potential eines solchen, mit Masse von überall gleicher Dichtigkeit (die wir gleich 1 setzen) erfüllten Körpers zu bestimmen, denken wir uns denselben zunächst mit einem festen, rechtwinkligen Coordinatensysteme verbunden. Auf dies System bezogen habe ein beliebiger Punkt des Körpers die Coordinaten ξ, η, ζ, ein vom Körper angezogener materieller Punkt die Coordinaten α, β, γ. Die Z-Axe sei die Ringaxe. Dann ist, wenn e die Entfernung beider Punkte, ausgedrückt durch die Coordinaten derselben, bezeichnet, das Potential des Ringkörpers

$$(1.)\qquad U = \iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{e},$$

wobei die Integration auf alle Punkte des Körpers auszudehnen ist.

Statt jener Coordinaten wollen wir cylindrische Coordinaten einführen. Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt und die Ringaxe eine Ebene gelegt — der Kürze wegen soll jede solche die Ringaxe enthaltende Ebene Meridianebene genannt werden —, ferner eine gerade Kreiscylinderfläche mit dem Radius r construirt, deren Axe die Ringaxe ist, und betrachten wir die Schnittlinie beider Flächen als Z-Axe, die Schnittlinie der Meridianebene und der ΞH-Ebene als X-Axe eines ebenen rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist die räumliche Lage des Punktes bestimmt durch die auf dieses System bezogenen Coordinaten x und z und durch den Winkel φ, den die Meridianebene mit einer andern, festen Meridianebene bildet. Letztere möge mit der ΞZ-Ebene den Winkel ε einschliessen. Setzen wir noch fest, dass die negative X-Axe vom Coordinatenanfang nach der Ringaxe

zu sich erstrecke und dass die Z-Axe mit der Z-Axe in Bezug auf positive und negative Richtung übereinstimme, so hängen die Coordinaten beider Systeme durch folgende Gleichungen zusammen:

$$(2.)\quad \xi = (r+x)\cos(\varphi-\varepsilon),\quad \eta = (r+x)\sin(\varphi-\varepsilon),\quad \zeta = z.$$

Um das Potential in den neuen Coordinaten auszudrücken, kann man das Volumenelement bestimmen entweder mit Hülfe der aus den Relationen (2.) sich ergebenden Functionaldeterminante, oder man kann folgende geometrische Betrachtung zu Grunde legen: Wird der Körper durch unendlich viele Meridianebenen, ferner durch eine Schaar unendlich naher, der ΞH-Ebene paralleler Ebenen und durch eine Schaar unendlich naher, paralleler gerader Kreiscylinderflächen geschnitten, so wird er in rechtwinklige, parallelopipedische Elemente zerlegt, deren Volumen ausgedrückt wird durch $(r+x)d\varphi\, dx\, dz$. Es ist daher

$$(3.)\quad U = \iiint \frac{(r+x)d\varphi\, dx\, dz}{e}.$$

Bezeichnen wir das Flächenelement $dx dz$ kurz mit $d\omega$, so ergiebt sich aus (3.)

$$U = r\int d\varphi \int \frac{d\omega}{e} + \int d\varphi \int \frac{x\, d\omega}{e}.$$

Hier ist nach ω über die durch eine Meridianebene entstehende Schnittfigur, dann nach φ über den Umfang des Einheitskreises zu integriren. Das Integral $\int \frac{d\omega}{e}$ ist aber das Potential der Schnittfigur, welches für verschiedene specielle Fälle bekannt ist und das im Folgenden mit V bezeichnet werden soll. In demselben sowohl wie in dem Integral $\int \frac{x d\omega}{e}$ ist e eine Function der neuen Coordinaten des Punktes P, die wir mit a, c, φ_0 bezeichnen wollen, und der Coordinaten eines Punktes der Schnittfigur x, z, φ; nach der Integration werden die sich ergebenden Ausdrücke die Variable φ noch enthalten. Es kann aber bei Bestimmung jener Flächenintegrale e in anderer Form dargestellt sein, man kann z. B. sich das XZ-Coordinatensystem durch eine dritte, die Y-Axe, zu einem rechtwinkligen Raumcoordinatensystem vervollständigt denken, e in diesen Coordinaten ausdrücken, so dass $e = \sqrt{(x-a)^2+b^2+(z-c)^2}$ gesetzt wird, wobei b die Y-Coordinate des Punktes P ist, und nach vollzogener Integration die Variable φ wieder einführen.

Ferner kann man unbeschadet der Allgemeinheit der Entwickelung

annehmen, dass die feste Meridianebene durch den Punkt P geht, also $\varphi_0 = 0$ ist. Fällt man von P aus das Loth b auf die Ebene der Schnittfigur und das Loth auf die Ringaxe, welches wir m nennen wollen und für welches die Beziehung besteht $m^2 = \alpha^2 + \beta^2$, verbindet die Endpunkte beider Lothe durch eine Gerade, so hat dieselbe die Länge $r+a$ und schliesst mit m den Winkel φ ein, und es ist

$$(4.) \quad r+a = m\cos\varphi, \quad b = m\sin\varphi.$$

Wir formen den Ausdruck (3.) für das Potential noch in folgender Weise um:

$$U = \iint \frac{(r+a)-(a-x)}{e}\, d\varphi\, d\omega,$$

folglich mit Rücksicht auf die Relationen (4.)

$$(5.) \quad U = m\int_0^{2\pi} V.\cos\varphi\, d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{(a-x)\,d\omega}{e}.$$

Es sei noch bemerkt, dass $-\int \frac{(a-x)\,d\omega}{e}$ der Ausdruck für die X-Componente der Kraft ist, mit welcher die ganze Fläche den Punkt anzieht, wenn jedes Massentheilchen mit constanter, von der Entfernung unabhängiger Kraft anziehend wird, daher auch der partielle Differentialquotient nach a der Kraftfunction $W = -\int e\, d\omega$, so dass das Potential auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(6.) \quad U = m\int_0^{2\pi} V.\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial a}\, d\varphi.$$

Liegt der angezogene Punkt in der Ringaxe, so ist $m = 0$, und es verschwindet der erste Theil in (5.) und (6.).

Für specielle Arten von Ringkörpern wird gewöhnlich der Ausdruck (5.) am besten zu verwerthen sein. Ist beispielsweise der durch eine Meridianebene erzeugte Querschnitt ein Rechteck, bei dem ein Seitenpaar der Ringaxe parallel ist, so ist sowohl V wie $\int \frac{(a-x)\,d\omega}{e}$ durch einfache Integrationen zu bestimmen. Man erhält dann das Potential eines geraden Hohlcylinders mit kreisförmiger Basis, und wenn man annimmt, dass die Ringaxe selbst eine verlängerte Rechteckseite ist, das Potential eines vollen Kreiscylinders. Für $m = 0$ ergiebt sich leicht der bekannte Ausdruck des Potentials.

Im Folgenden soll nun das Potential eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt bestimmt werden. Wir benutzen dazu den Ausdruck (5.) und treffen folgende nähere Bestimmungen: der Anfangspunkt des rechtwinkligen XZ-Coordinatensystems sei der Mittelpunkt des Kreises, die ΞH-Ebene enthalte also alle Kreismittelpunkte, der Kreisradius werde mit ϱ bezeichnet.

Das Potential eines Kreises ist bekannt. Herr *E. Heine* hat dasselbe direct bestimmt (dieses Journal Bd. 76, S. 271). Auch hat Herr *F. Grube* in seiner Abhandlung „Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids" (dieses Journal Bd. 69) das Potential einer elliptischen, unendlich dünnen Scheibe bestimmt, aus dem das Potential des Kreises abgeleitet werden kann. Das *Heine*sche Kreispotential enthält folgende Grössen: 1) den Radius des Kreises, 2) das vom angezogenen Punkte auf die Kreisebene gefällte Loth, das wir schon oben mit b bezeichnet haben, 3) die Entfernung des Endpunktes dieses Lothes vom Kreismittelpunkte, die wir p nennen, indem wir bemerken, dass $p^2 = a^2+c^2$ ist. Dann ist

$$V = 2\varrho^2\int_{s_0}^{a}\sqrt{1-\frac{b^2}{s}-\frac{p^2}{s+\varrho^2}}\,\frac{ds}{(s+\varrho^2)\sqrt{s}},$$

wobei s_0 die positive Wurzel der Gleichung ist:

$$1-\frac{b^2}{s}-\frac{p^2}{s+\varrho^2} = 0.$$

Für einen Punkt innerhalb der Kreisfläche ist die untere Grenze 0. Wir formen den Ausdruck um, indem wir $\varrho^2 s = \tau$ setzen und dann für τ wieder s schreiben. Es ist dann

$$V = 2\int_{s_0}^{a}\sqrt{\varrho^2 s^2-s(b^2+p^2-\varrho^2)-b^2}\,\frac{ds}{s(s+1)\sqrt{s+1}},$$

und hierbei ist s_0 die positive Wurzel der Function unter dem Wurzelzeichen. Setzt man noch zur Abkürzung

$$(7.)\qquad u = \sqrt{\varrho^2 s^2-s(b^2+p^2-\varrho^2)-b^2},$$

so ergiebt sich als erster Theil des Körperpotentials nach (5.)

$$(8.)\qquad m\int_0^{2\pi} V\cos\varphi\, d\varphi = 2m\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\int_{s_0}^{\infty} u\,\frac{ds}{s(s+1)\sqrt{s+1}}.$$

Es ist sodann das Integral

$$V_1 = \int\frac{a-x}{e}\,d\omega$$

für eine Kreisfläche zu ermitteln.

Der Fusspunkt des von P auf die Kreisebene gefällten Lothes b sei mit einem beliebigen Punkte des Kreises verbunden; diese Verbindungslinie heisse l. Die Verbindungslinie desselben Lothfusspunktes mit dem Kreismittelpunkte p betrachte man als Axe eines Polarcoordinatensystems, der Punkt der Kreisfläche möge die Polarcoordinaten λ und ψ haben, p bilde mit der positiven X-Axe den Winkel μ. Dann ist

$$e^2 = b^2+l^2 = b^2+p^2+\lambda^2-2p\lambda\cos\psi,$$

$$x = \lambda\cos(\psi-\mu), \quad d\omega = \lambda\, d\lambda\, d\psi, \quad a = p\cos\mu.$$

Wie Herr *E. Heine* bei Bestimmung des Kreispotentials benutzen wir das bestimmte Integral

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{e^2+w^2}.$$

Man erhält dann

$$(9.)\quad V_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dw\int_0^{e}\lambda\, d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{p\cos\mu-\lambda\cos(\psi-\mu)}{w^2+b^2+p^2+\lambda^2-2p\lambda\cos\psi}\,d\psi.$$

Setzt man zur Abkürzung $w^2+b^2+p^2+\lambda^2 = q$, so ergiebt sich für das Integral nach ψ in (9.)

$$(10.)\quad \int_0^{2\pi}\frac{p\cos\mu-\lambda\cos(\psi+\mu)}{q-2p\lambda\cos\psi}\,d\psi = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\mu(p-\lambda\cos\psi)}{q-2p\lambda\cos\psi}\,d\psi - \int_0^{2\pi}\frac{\lambda\sin\psi\sin\mu}{q-2p\lambda\cos\psi}\,d\psi.$$

Das letzte Integral in (10.) verschwindet, da für je zwei Winkel $\psi = 180-\psi_1$ und $\psi = 180+\psi_1$ die Werthe der zu integrirenden Function sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Im vorhergehenden Integral schreiben wir

$$\frac{p-\lambda\cos\psi}{q-2p\lambda\cos\psi} = \frac{1}{2p}\left[1+\frac{2p^2-q}{q-2p\lambda\cos\psi}\right].$$

Es ist daher

$$\int_0^{2\pi}\frac{p\cos\mu-\lambda\cos(\psi+\mu)}{q-2p\lambda\cos\psi} = \frac{\cos\mu}{2p}\left[2\pi+(2p^2-q)\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{q-2p\lambda\cos\psi}\right].$$

Nun ist, da $q > 2p\lambda$,

$$\int\frac{d\psi}{q-2p\lambda\cos\psi} = \frac{1}{\sqrt{q^2-4p^2\lambda^2}}\arccos\frac{q\cos\psi-2p\lambda}{q-2p\lambda\cos\psi}$$

und nimmt für die Grenzen 0 und 2π den Werth $\dfrac{2\pi}{\sqrt{q^2-4p^2\lambda^2}}$ an.

Es ergiebt sich daher, wenn wir die erhaltenen Werthe in (9.) ein-

setzen und berücksichtigen, dass $\cos\mu = \frac{a}{p}$ ist,

$$V_1 = \frac{a}{p^2}\int_{-\infty}^{\infty} dw \int_0^{\varrho}\left[1+\frac{2p^2-q}{\sqrt{q^2-4p^2\lambda^2}}\right]\lambda d\lambda.$$

Da w nur in q enthalten ist und zwar nur in der zweiten Potenz, so können wir nach w anstatt von $-\infty$ bis $+\infty$ von 0 bis ∞ integriren und den Ausdruck mit 2 multipliciren. Daher ist

$$V_1 = \frac{a}{p^2}\int_0^{\infty} dw \int_0^{\varrho}\left[1+\frac{2p^2-q}{\sqrt{q^2-4p^2\lambda^2}}\right] d\lambda^2.$$

Es war

$$q = w^2+b^2+p^2+\lambda^2,$$

daher $dq = d\lambda^2$. Setzt man nun

$$R = q^2-4p^2\lambda^2,$$

so ist

$$dR = 2(q-2p^2)d\lambda^2,$$

folglich

$$V_1 = \frac{a}{p^2}\int_0^{\infty} dw\left[\int_0^{\varrho} d\lambda^2 - \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{\sqrt{R}}\right],$$

wobei R_1 und R_2 die Werthe sind, die R für $\lambda = 0$ und $\lambda = \varrho$ annimmt. Führt man die Integrationen aus, so erhält man

$$V_1 = \frac{a}{p^2}\int_0^{\infty}\left[w^2+b^2+p^2+\varrho^2-\sqrt{(w^2+b^2+p^2+\varrho^2)^2-4p^2\varrho^2}\right]dw.$$

Wir führen hier nun für w eine neue Variable s ein durch die Substitution

$$w^2+b^2+p^2+\varrho^2-\sqrt{(w^2+b^2+p^2+\varrho^2)^2-4p^2\varrho^2} = \frac{2p^2}{s+1}.$$

Es ist dann s die grössere Wurzel der Gleichung

$$\varrho^2(s+1)^2-(s+1)(w^2+b^2+p^2+\varrho^2)+p^2 = 0,$$

folglich

$$(11.)\qquad w = \frac{1}{\sqrt{s+1}}\sqrt{\varrho^2(s+1)^2-(s+1)(b^2+p^2+\varrho^2)+p^2}.$$

Der Wurzelausdruck aber ist, wie man leicht findet, wenn man die Function unter dem Wurzelzeichen nach Potenzen von s ordnet, unsere früher mit u bezeichnete Function; daher

$$(12.)\qquad V_1 = 2a\int_{s_0}^{\infty}\frac{\partial\frac{u}{\sqrt{s+1}}}{\partial s}\,\frac{ds}{s+1},$$

wobei, wie früher, s_0 die positive Wurzel der Gleichung $u = 0$ ist. Auch ergiebt eine weitere Untersuchung, dass, wenn der Punkt P in der Kreisfläche liegt, die untere Grenze 0 wird.

Durch eine Integration durch Theile, bei welcher der vom Integralzeichen freie Theil verschwindet, erhält man auch

$$(13.)\quad V_1 = 2a\int_{s_0}^{\infty}\frac{u\,ds}{\sqrt{s+1}(s+1)^2}.$$

Somit ergiebt sich für das Körperpotential nach (5.), wenn man noch beachtet, dass nach den Relationen (4.) $a = m\cos\varphi - r$ ist, und mit Benutzung des in (8.) angegebenen Werthes

$$U = 2m\int_0^{2\pi}\cos\varphi . d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{u\,ds}{s(s+1)\sqrt{s+1}} - 2\int_0^{2\pi}(m\cos\varphi - r)d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{u\,ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}.$$

Vereinigt man die Functionen unter den Integralzeichen, so ergiebt sich

$$U = 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{u}{(s+1)\sqrt{s+1}}\left(\frac{m\cos\varphi}{s} - \frac{m\cos\varphi - r}{s+1}\right)ds$$

und schliesslich

$$(14.)\quad U = 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{(m\cos\varphi + rs)u}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}}\,ds.$$

Um die in u enthaltenen, von φ abhängigen Grössen als Functionen dieser Variablen darzustellen und die auf das erste System bezogenen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P einzuführen, beachte man, dass $p^2 = a^2 + c^2$ ist, und da nach den Relationen (2.) $c = \gamma$, nach (4.) $a = m\cos\varphi - r$ ist, wobei zu erwähnen, dass $m^2 = \alpha^2 + \beta^2$, so folgt

$$p^2 = \gamma^2 + (m\cos\varphi - r)^2.$$

Ferner ist nach (4.) $b^2 = m^2\sin^2\varphi$, also

$$p^2 + b^2 = \gamma^2 + m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi,$$

daher nach (7.)

$$u^2 = \varrho^2 s^2 - s(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + r^2 - \varrho^2) - m^2 + 2mrs\cos\varphi + m^2\cos^2\varphi,$$

und nach weiteren Umformungen

$$(15.)\quad \begin{cases} u = \sqrt{(m\cos\varphi + rs)^2 - A^2}, \\ \text{wobei} \\ A^2 = (r^2 - \varrho^2)s(s+1) + (\alpha^2 + \beta^2)(s+1) + s\gamma^2 \end{cases}$$

ist. Daher können wir das Körperpotential in der Form schreiben:

$$(16.)\quad U = 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{(m\cos\varphi + rs)\sqrt{(m\cos\varphi + rs)^2 - A^2}}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}}\,ds.$$

Das Integral ist im allgemeinen nach beiden Variablen s und φ elliptisch.

Ein einfaches elliptisches Integral erhält man jedoch für den speciellen Fall, in welchem der Punkt P in der Ringaxe liegt. Es ist dann

$$m^2 = \alpha^2+\beta^2 = 0, \quad A^2 = (r^2-\varrho^2)s(s+1)+s\gamma^2,$$

u, also auch s_0 wird von φ unabhängig. Man kann daher die Reihenfolge der Integrationen ohne weiteres umkehren und nach φ integriren. Es ist

$$u = \sqrt{\varrho^2 s(s+1)-(r^2+\gamma^2)s},$$

$$s_0 = \frac{r^2+\gamma^2-\varrho^2}{\varrho^2},$$

$$U' = 4r\pi \int_{\frac{r^2+\gamma^2-\varrho^2}{\varrho^2}}^{\infty} \sqrt{\varrho^2 s(s+1)-(r^2+\gamma^2)s}\cdot\frac{ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}.$$

Führt man hier noch für s die Variable τ ein durch die Substitution $\varrho^2(s+1) = \tau$, so erhält man

$$U' = 4r\pi\varrho^2 \int_{r^2+\gamma^2}^{\infty} \sqrt{(\tau-\varrho^2)[\tau-(r^2+\gamma^2)]}\,\frac{d\tau}{\tau^2\sqrt{\tau}}.$$

Die partiellen Differentialquotienten von U nach den Grössen α, β, γ ergeben die Componenten der anziehenden Kraft in den Richtungen der Axen des festen Coordinatensystems. Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck für die Z-Componente, da nur A^2 die Coordinate γ enthält. Um U nach γ zu differentiiren, kann man ohne weiteres unter dem ersten Integralzeichen differentiiren; die Differentiation des Integrals mit der Variablen s erfordert zunächst ein Differentiiren über die untere Grenze, dann unter dem Integralzeichen. Der erste Theil fällt jedoch fort, da u für $s = s_0$ verschwindet. Man erhält daher

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \gamma} = 2\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{m\cos\varphi+rs}{s(s+1)\sqrt{s+1}}\,\frac{\partial\sqrt{(m\cos\varphi+rs)^2-A^2}}{\partial\gamma}ds \\ \quad = -2\gamma\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{m\cos\varphi+rs}{\sqrt{(m\cos\varphi+rs)^2-A^2}}\,\frac{ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}. \end{cases}$$

Um auch in den allgemeinen Ausdrücken für das Potential und für die Componenten der Kraft die Reihenfolge der Integrationen umkehren zu können, bemerke man zunächst, dass die zu integrirende Function nur den Cosinus der Variablen φ enthält, man daher statt von 0 bis 2π von 0 bis π integriren und den ganzen Ausdruck mit 2 multipliciren kann. Ferner ist die Abhängigkeit der Grösse s_0 von φ genauer zu untersuchen. Es ist nach früheren Ableitungen

$$u^2 = \varrho^2 s^2 - s(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2-\varrho^2-2mr\cos\varphi)+m^2\sin^2\varphi.$$

Setzt man der Kürze wegen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2-\varrho^2 = B^2$, und löst die Gleichung $u^2 = 0$ nach s auf, so ergiebt sich

$$(18.)\qquad s_0 = \frac{B^2-2mr\cos\varphi+\sqrt{(B^2-2mr\cos\varphi)^2+4m^2\varrho^2\sin^2\varphi}}{2\varrho^2}.$$

B^2 ist von φ unabhängig. Wächst φ von 0 bis π, so nimmt $\cos\varphi$ immer ab, $-2mr\cos\varphi$ immer zu. Von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst auch $4m^2\varrho^2\sin^2\varphi$, daher s_0. Wächst φ aber von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so nimmt $4m^2\varrho^2\sin^2\varphi$ ab. Um hier zu erkennen, ob s_0 trotzdem noch wächst, formen wir den Ausdruck (18.) in folgender Weise um:

$$s_0 = \frac{B^2-2mr\cos\varphi+\sqrt{B^4-4B^2mr\cos\varphi+4m^2[r^2-(r^2-\varrho^2)\sin^2\varphi]}}{2\varrho^2}.$$

Da $r^2-\varrho^2$ positiv ist, so muss, wenn φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst, $-(r^2-\varrho^2)\sin^2\varphi$ wachsen, also auch s_0. Es hat also s_0 seinen grössten Werth für $\varphi = \pi$, nämlich

$$(19.)\qquad \sigma_1 = \frac{B^2+2mr}{\varrho^2} = \frac{\gamma^2-\varrho^2+(m+r)^2}{\varrho^2},$$

seinen kleinsten für $\varphi = 0$. Liegt der Punkt ausserhalb des Körpers, so ist dieser Werth

$$(20.)\qquad \sigma_0 = \frac{B^2-2mr}{\varrho^2} = \frac{\gamma^2-\varrho^2+(m-r)^2}{\varrho^2}.$$

Liegt der Punkt innerhalb des Körpers, also auch innerhalb der durch die Haupt-Meridianebene erzeugten Schnittfigur, so ist, wie aus den früheren Bemerkungen über das Potential des Kreises hervorgeht, für $\varphi = 0$, $s_0 = 0$ zu setzen. Man vergleiche Ausdruck (7.). Es wird dort $b = 0$, und da $p < \varrho$ ist, so ergiebt sich die untere Grenze 0. Also ist in solchem Falle $\sigma_0 = 0$.

Denkt man sich nun die Bogentheile von 0 bis π als Abscissen auf einer Axe abgetragen und die zugehörigen Werthe von s_0 als rechtwinklige Ordinaten errichtet, so bestimmen die Endpunkte der Ordinaten einen Curvenbogen, der seine convexe Seite der Abscissenaxe zukehrt. Derjenige Theil der Coordinatenebene, welcher von diesem Curvenbogen und den nach positiver Richtung in's Unendliche verlängerten Ordinaten der beiden Endpunkte des Bogens begrenzt wird, ist das Gebiet, über welches sich die doppelte Integration in (16.) und (17.) zu erstrecken hat. Will man nun

die Reihenfolge der Integrationen umkehren, so ist 1) für ein festgehaltenes s zwischen σ_0 und σ_1 zu integriren nach φ zwischen 0 und dem aus der Gleichung $u^2 = 0$ sich ergebenden Werthe φ_1, der zwischen 0 und π liegt, dann nach s von σ_0 bis σ_1; 2) für ein festgehaltenes $s > \sigma_1$ nach φ von 0 bis π, dann nach s von σ_1 bis ∞. Daher ist auch

$$U = 4\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{ds}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\varphi_1} (m\cos\varphi+rs).u\,d\varphi$$
$$+ 4\int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{ds}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\pi} (m\cos\varphi+rs).u\,d\varphi,$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} = -4\gamma\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(m\cos\varphi+rs)}{u}\,d\varphi$$
$$-4\gamma\int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\pi} \frac{m\cos\varphi+rs}{u}\,d\varphi.$$

Es soll nun noch gezeigt werden, wie in dem Ausdruck für $\frac{\partial U}{\partial \gamma}$ der nicht elliptische Theil von dem elliptischen durch eine einfache Substitution zu trennen ist. Setzt man $\frac{m\sin\varphi}{u} = \operatorname{tang}\chi$, so werden für $\sigma_0 < s < \sigma_1$, da φ_1 der Werth von φ ist, für welchen u verschwindet, die Grenzen des Integrals für die neue Variable 0 und $\frac{\pi}{2}$; für ein $s > \sigma_1$ verschwindet u nicht mehr; wächst nun φ von 0 bis π, so wächst $\operatorname{tang}\chi$, also auch χ von 0 bis zu einem grössten Werthe und nimmt von da an wieder ab bis 0. Den grössten Werth von χ, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen muss, da $\operatorname{tang}\chi$ immer positiv bleibt, nennen wir χ_1.

Differentiirt man nun die Gleichung

$$\frac{m\sin\varphi}{u} = \operatorname{tang}\chi,$$

so erhält man unter Benutzung des Werthes für u, wie er in (15.) angegeben ist:

$$\left[m\cos\varphi.u + \frac{m^2\sin^2\varphi(m\cos\varphi+rs)}{u}\right]d\varphi = u^2.\frac{d\chi}{\cos^2\chi},$$

also

$$[m\cos\varphi.u + u\operatorname{tang}^2\chi.(m\cos\varphi+rs)]d\varphi = u^2.\frac{d\chi}{\cos^2\chi},$$
$$\left[m\cos\varphi.u.\frac{1}{\cos^2\chi} + rs.u\operatorname{tang}^2\chi\right]d\varphi = u^2.\frac{d\chi}{\cos^2\chi}.$$

Hieraus ergiebt sich durch weitere Umformung

$$(21.)\qquad \frac{d\varphi}{u} = \frac{d\chi}{m\cos\varphi+rs\sin^2\chi},$$

ferner

$$(22.)\qquad \begin{cases} \dfrac{m\cos\varphi+rs}{u}\,d\varphi = \dfrac{m\cos\varphi+rs\sin^2\chi+rs\cos^2\chi}{m\cos\varphi+rs\sin^2\chi}\,d\chi \\ \qquad\qquad\qquad = \left[1+\dfrac{rs\cos^2\chi}{m\cos\varphi+rs\sin^2\chi}\right]d\chi. \end{cases}$$

Nun ergiebt sich aus der Substitutionsformel

$$\frac{1}{\cos^2\chi} = 1+\operatorname{tang}^2\chi = \frac{u^2+m^2\sin^2\varphi}{u^2} = \frac{m^2+2mrs\cos\varphi+r^2s^2-A^2}{(m\cos\varphi+rs)^2-A^2}.$$

Für $m\cos\varphi$ als Unbekannte erhält man daher die quadratische Gleichung

$$(m\cos\varphi+rs)^2-A^2 = (m^2+2mrs\cos\varphi+r^2s^2-A^2)\cos^2\chi$$

oder geordnet

$$(23.)\qquad (m\cos\varphi)^2+2rs.\sin^2\chi m\cos\varphi = m^2\cos^2\chi+(A^2-r^2s^2)\sin^2\chi.$$

Indem man den in (15.) angegebenen Werth für A^2 etwas umformt und die schon früher benutzte Grösse $B^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+r^2-\varrho^2$ einführt, erhält man

$$A^2 = r^2s^2-\varrho^2s^2+sB^2+m^2.$$

Löst man nun die Gleichung (23.) auf, so ergiebt sich

$$(24.)\qquad m\cos\varphi = -rs\sin^2\chi\pm\sqrt{r^2s^2\sin^4\chi+s(B^2-s\varrho^2)\sin^2\chi+m^2},$$

wobei vorläufig unbestimmt bleibt, welches Vorzeichen dem Wurzelausdruck zu geben ist. Letzteren bezeichnen wir im Folgenden der Kürze wegen mit $F(\chi)$. Aus (24.) erhält man

$$(25.)\qquad m\cos\varphi+rs\sin^2\chi = \pm F(\chi),$$

folglich ist nach (22.)

$$(26.)\qquad \int\frac{m\cos\varphi+rs}{u}\,d\varphi = \int d\chi+rs\int\frac{\cos^2\chi}{\pm F(\chi)}\,d\chi.$$

Es ist jetzt zu entscheiden, welches Vorzeichen die Wurzel im Ausdruck (24.) hat.

1) Für $\sigma_0 < s < \sigma_1$ ist nach φ von 0 bis φ_1 zu integriren, nach χ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$.

Der Ausdruck (24.) muss für $\varphi=0$ den Werth m liefern. Da

$$\sin^2\chi = \frac{m^2\sin^2\varphi}{u^2+m^2\sin^2\varphi} = 0$$

für $\varphi = 0$ ist, so erkennt man, dass jener Wurzelausdruck zunächst das positive Zeichen haben muss.

Für $\varphi = \varphi_1$ ist $u = 0$, $\sin^2\chi = 1$, und (24.) ergiebt

$$(27.)\qquad m\cos\varphi_1 = -rs \pm \sqrt{r^2s^2+s(B^2-s\varrho^2)+m^2}.$$

Wächst s von σ_0 bis σ_1, so wächst φ_1 von 0 bis π. Nun ist nach den Relationen (19.), (20.), wenn der Punkt ausserhalb des Körpers liegt:

$$B^2-\sigma_0\varrho^2 = 2mr;\quad B^2-\sigma_1\varrho^2 = -2mr.$$

Es ändert sich also, wenn s von σ_0 bis σ_1 wächst, der Wurzelausdruck in (27.) von $rs+m$ bis $rs-m$, also $m\cos\varphi_1$, wenn das positive Zeichen benutzt wird, von $+m$ bis $-m$, wie erforderlich ist. Nicht anders ist es, wenn der angezogene Punkt innerhalb des Körpers liegt, also $\sigma_0 = 0$ zu setzen ist.

Daraus geht hervor, dass in (24.), also auch in (26.) der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist. Somit ist

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{m\cos\varphi+rs}{u}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}+rs\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi.$$

2) Für ein $s > \sigma_1$ ist nach φ von 0 bis π zu integriren, nach χ von 0 bis zum Maximalwerth χ_1, von da an wieder bis 0.

Zunächst bemerken wir, dass das Integral $\int d\chi$ für diese Grenzen verschwindet. Um zu entscheiden, welches Vorzeichen $F(\chi)$ erhält, beachte man, dass, während u nicht mehr verschwindet, für ein festgehaltenes s $m\cos\varphi$ von m bis $-m$ abnehmen muss. Für beide Grenzwerthe von φ ist

$$\sin^2\chi = \frac{m\sin^2\varphi}{u^2+m^2\sin^2\varphi} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, dass in (24.) zu Anfang die Wurzel das positive Zeichen haben muss, zuletzt das negative Zeichen, dass also ein Zeichenwechsel stattfindet, und zwar wegen der Stetigkeit der Function für dasjenige χ, für welches $F(\chi)$ verschwindet. Dass dieser Werth mit der Grenze χ_1 übereinstimmt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Nach (21.) ist

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{m\cos\varphi+rs\sin^2\chi}{u}.$$

Das Maximum für χ ergiebt sich aus der Gleichung

$$m\cos\varphi+rs\sin^2\chi = 0.$$

Der Ausdruck (25.) aber lehrt, dass dann auch $F(\chi) = 0$ sein muss.

Daher ist

$$\int_0^\pi \frac{m\cos\varphi + rs}{u}\,d\varphi = rs\int_0^{\chi_1} \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi - rs\int_{\chi_1}^0 \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi$$

$$= 2rs\int_0^{\chi_1} \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi.$$

Für die Z-Componente der vom Körper ausgeübten Kraft erhält man daher den Werth:

$$\frac{\partial U}{\partial\gamma} = -2\gamma\pi\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{ds}{(s+1)^{\frac{5}{2}}} - 4\gamma r\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{s\,ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi$$

$$-8\gamma r\int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{s\,ds}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}\int_0^{\chi_1} \frac{\cos^2\chi}{F(\chi)}\,d\chi,$$

wobei χ_1 der aus $F(\chi) = 0$ sich ergebende Werth für χ ist, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, σ_0 und σ_1 die in (19.), (20.) angegebenen Werthe besitzen.

Das erste Integral lässt sich noch ausführen. Die Integration ergiebt

$$-\frac{4\gamma\pi}{3}\left[\frac{1}{(\sigma_0+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(\sigma_1+1)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Benutzt man die in (19.), (20.) angegebenen Werthe für σ_0 und σ_1, so erhält man, wenn der angezogene Punkt ausserhalb des Körpers liegt:

$$-\frac{4\pi\gamma\varrho^3}{3}\left[\frac{1}{[\gamma^2+(m-r)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[\gamma^2+(m+r)^2]^{\frac{3}{2}}}\right];$$

liegt der Punkt im Körper:

$$-\frac{4\gamma\pi}{3}\left[1 - \frac{\varrho^3}{[\gamma^2+(m+r)^2]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Lingen, October 1887.

Ueber invariante Differentialausdrücke.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

Der Differentialausdruck, welcher den Krümmungsradius irgend einer Curve im Punkte (X, Y, Z) angiebt, hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass, wenn man in ihm setzt

$$dX = \omega.dx, \quad dY = \omega.dy, \quad dZ = \omega.dz,$$

folglich

$$d^2X = \omega.d^2x + d\omega.dx, \quad d^2Y = \omega.d^2y + d\omega.dy, \quad d^2Z = \omega.d^2z + d\omega.dz,$$

man denselben Ausdruck in dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z mit dem beliebigen Factor ω multiplicirt erhält.

Diese Eigenschaft bewirkt, dass die Auflösung der Gleichung

$$(1.) \quad \frac{(dX^2+dY^2+dZ^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dXd^2Y-dYd^2X)^2+(dYd^2Z-dZd^2Y)^2+(dZd^2X-dXd^2Z)^2]^{\frac{1}{2}}} = \varkappa,$$

wodurch alle Curven definirt werden, welche einen constanten Krümmungsradius $\varkappa$ haben, höchst einfach ist; denn, setzt man wie oben

$$(2.) \quad dX = \omega.dx, \quad dY = \omega.dy, \quad dZ = \omega.dz, \quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{\omega(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2]^{\frac{1}{2}}} = \varkappa$$

oder

$$\omega.\varrho = \varkappa,$$

wenn man mit ϱ den Krümmungsradius der Curve x, y, z bezeichnet. Aus dieser Gleichung kommt nun $\omega = \frac{\varkappa}{\varrho}$ und, wenn man diesen Werth von ω in die Gleichungen (2.) einsetzt, so erhält man folgende Werthe der Coordinaten X, Y, Z der gesuchten Curven:

$$X = \varkappa\int\frac{dx}{\varrho}, \quad Y = \varkappa\int\frac{dy}{\varrho}, \quad Z = \varkappa\int\frac{dz}{\varrho}.$$

In diesen Formeln bedeuten x, y, z drei beliebige Functionen einer Veränderlichen, d. h. die Coordinaten einer beliebig gewählten Curve, und ϱ den Krümmungsradius derselben.

Hierdurch wurde ich veranlasst zu untersuchen, ob es noch andere Differentialausdrücke giebt, welche die oben erwähnte Eigenschaft haben, und die Resultate meiner Untersuchung sind im Wesentlichen folgende:

1. Es giebt unendlich viele Differentialausdrücke, welche invariant in Bezug auf die Substitution

$$dX = \omega . dx, \quad dY = \omega . dy, \quad dZ = \omega . dz$$

sind, d. h. durch diese Substitution keine andere Aenderung erleiden, als dass sie eine Potenz von ω als Factor erhalten.

2. In jeder Differentialordnung n ($n > 1$) giebt es zwei von einander unabhängige elementare Invarianten $Q_n\, R_n$, welche in Bezug auf alle Ableitungen, die sie enthalten, homogen und vom Grade n sind und die Ableitungen $X_n\, Y_n\, Z_n$ (der Ordnung n) nur im ersten Grade enthalten.

Die elementaren Invarianten erster Ordnung sind die drei Ableitungen $X_1\, Y_1\, Z_1$.

3. Jede Invariante der Ordnung n ist eine homogene Function der elementaren Invarianten

$$X_1\, Y_1\, Z_1, \quad Q_2\, R_2, \quad Q_3\, R_3, \quad \ldots \quad Q_n\, R_n,$$

wenn die Ordnung jeder dieser Invarianten als Grad derselben gerechnet wird.

Und umgekehrt, jede solche Function der elementaren Invarianten ist ebenfalls eine Invariante.

Anmerkung. Ich habe im Folgenden nur solche Ausdrücke betrachtet, welche die Ableitungen dreier unbekannten Functionen X, Y, Z enthalten. Es lassen sich aber diese Resultate ohne Mühe auf jede Anzahl i von unbekannten Functionen ausdehnen. Die elementaren Invarianten sind alsdann $i-1$.

I.

Der Ausdruck

$$\varphi(X_1\, Y_1 Z_1,\, X_2\, Y_2 Z_2, \ldots X_n\, Y_n Z_n)$$

(worin $X_\nu Y_\nu Z_\nu$ die Ableitungen der νten Ordnung bedeuten sollen) heisse *invariant* in Bezug auf die Substitution

$$(\sigma.) \qquad X_1 = \omega . x_1, \quad Y_1 = \omega . y_1, \quad Z_1 = \omega . z_1,$$

wenn er der Gleichung genügt

$$(1.)\qquad \varphi(X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2, \dots X_nY_nZ_n) = \omega^\lambda.\varphi(x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \dots x_ny_nz_n).$$

Diese Gleichung soll durch die Werthe (σ.) der $X_1Y_1Z_1$ und die daraus folgenden Werthe von $X_2Y_2Z_2, \dots X_nY_nZ_n$:

$$(\sigma'.)\quad \begin{cases} X_2 = \omega x_2 + \omega_1 x_1, & Y_2 = \omega y_2 + \omega_1 y_1, \\ & Z_2 = \omega z_2 + \omega_1 z_1, \\ X_3 = \omega x_3 + 2\omega_1 x_2 + \omega_2 x_1, & Y_3 = \omega y_3 + 2\omega_1 y_2 + \omega_2 y_1, \\ & Z_3 = \omega z_3 + 2\omega_1 z_2 + \omega_2 z_1, \\ X_4 = \omega x_4 + 3\omega_1 x_3 + 3\omega_2 x_2 + \omega_3 x_1, & Y_4 = \omega y_4 + 3\omega_1 y_3 + 3\omega_2 y_2 + \omega_3 y_1, \\ & Z_4 = \omega z_4 + 3\omega_1 z_3 + 3\omega_2 z_2 + \omega_3 z_1 \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

identisch, d. i. bei beliebigen Werthen von $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $\dots$ $x_ny_nz_n$, ω, ω_1, ω_2, $\dots$ ω_{n-1} erfüllt werden.

Ehe wir zur Bestimmung der Invarianten übergehen, wollen wir einige Eigenschaften derselben beweisen, welche uns im Folgenden nützlich sein werden.

Eigenschaften der Invarianten.

1. Setzt man in der Gleichung (1.) $\omega = 1$, also $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-1} = 0$, so kommt

$$\varphi(x_1\omega, y_1\omega, z_1\omega, x_2\omega, y_2\omega, z_2\omega, \dots x_n\omega, y_n\omega, z_n\omega)$$
$$= \omega^\lambda.\varphi(x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \dots x_ny_nz_n),$$

d. i. *jede Invariante ist homogen in Bezug auf die Ableitungen, die sie enthält.*

2. Wenn man die Gleichung (1.) nach den $x_ny_nz_n$ differentiirt, so findet man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_n} = \omega^{\lambda-1}.\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y_n} = \omega^{\lambda-1}.\frac{\partial\varphi}{\partial y_n},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z_n} = \omega^{\lambda-1}.\frac{\partial\varphi}{\partial z_n},$$

woraus erhellt:

Die partiellen Ableitungen jeder Invariante der Ordnung n nach den $X_nY_nZ_n$ sind wieder Invarianten.

Wenn wir nun annehmen, dass es eine Invariante der Ordnung n giebt, welche ganze Function von $X_nY_nZ_n$ ist, so kann man dieselbe wieder-

holt nach X_n oder nach Y_n oder nach Z_n differentiiren, und die Resultate aller dieser Differentiationen müssen Invarianten sein. Wir können offenbar dieses Verfahren fortsetzen, bis wir zu einer linearen Function von $X_n Y_n Z_n$ gelangen, also schliessen wir:

Wenn es in der Ordnung n Invarianten giebt, welche ganze Functionen von $X_n Y_n Z_n$ sind, so muss es auch solche geben, welche linear in Bezug auf $X_n Y_n Z_n$, also von der Form $AX_n + BY_n + CZ_n + D$ sind, wo A, B, C, D nur von den Ableitungen der niedrigeren Ordnungen abhängen.

3. Die Invarianten werden durch ein System von Differentialgleichungen definirt, die man auf folgende Weise finden kann.

Jede Invariante $\varphi(X_1 Y_1 Z_1, \dots X_n Y_n Z_n)$ soll zuerst eine homogene Function aller Ableitungen $X_1 Y_1 Z_1, \dots X_n Y_n Z_n$ sein, folglich genügt sie der Gleichung (worin λ den Grad der homogenen Function bedeutet):

$$(2.)\qquad \Sigma\left(X_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu} + Y_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu} + Z_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right) = \lambda.\varphi \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots n).$$

Ferner soll die Invariante von den Functionen $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{n-1}$ unabhängig sein; wenn man nämlich die Werthe der Ableitungen $X_2 Y_2 Z_2, \dots X_n Y_n Z_n$ aus den Gleichungen (σ'.) nimmt und in φ einsetzt, so sollen alle Functionen $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$ im Resultate verschwinden. Drücken wir nun aus, dass φ unabhängig von $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}$ ist, so finden wir folgende $n-1$ Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma(\nu-1)\left\{x_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu} + y_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu} + z_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0, \\ \Sigma\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}\left\{x_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu} + y_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu} + z_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots n) \\ \Sigma\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3}\left\{x_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu} + y_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu} + z_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1\frac{\partial\varphi}{\partial X_n} + y_1\frac{\partial\varphi}{\partial Y_n} + z_1\frac{\partial\varphi}{\partial Z_n} = 0. \end{cases}$$

In diesem Systeme von Differentialgleichungen können wir die $x_\nu y_\nu z_\nu$, welche als Factoren der partiellen Ableitungen von φ auftreten, durch die $X_\nu Y_\nu Z_\nu$ ersetzen. Wenn wir nämlich die erste der Gleichungen (3.) mit ω, die zweite mit $2\omega_1$, die dritte mit $3\omega_2$ u. s. w. und die letzte mit $(n-1)\omega_{n-2}$ multipliciren und addiren, so finden wir mit Beachtung der Gleichungen (σ'.):

$$\Sigma(\nu-1)\left\{X_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu}+Y_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu}+Z_{\nu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0.$$

Auf ähnliche Weise (wenn wir die $\varkappa$te Gleichung mit $\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}\omega_{\varkappa-2}$ multipliciren) finden wir

$$(4.)\quad \begin{cases} \Sigma\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}\left\{X_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu}+Y_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu}+Z_{\nu-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0,\\ \Sigma\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3}\left\{X_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial X_\nu}+Y_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_\nu}+Z_{\nu-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_\nu}\right\} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_1\frac{\partial\varphi}{\partial X_n}+Y_1\frac{\partial\varphi}{\partial Y_n}+Z_1\frac{\partial\varphi}{\partial Z_n} = 0. \end{cases}$$

Jede Function $\varphi(X_1Y_1Z_1,\dots X_nY_nZ_n)$, welche das System der Gleichungen (2.) und (4.) erfüllt, ist eine Invariante; denn sie ist unabhängig von den Functionen $\omega_1\,\omega_2\dots\omega_{n-1}$, so dass sie keine Aenderung erfährt, wenn gesetzt wird $\omega_1=\omega_2=\dots=\omega_{n-1}=0$, folglich ist

$$\varphi(X_1Y_1Z_1,\dots X_nY_nZ_n) = \varphi(x_1\omega,\,y_1\omega,\,z_1\omega,\dots x_n\omega,\,y_n\omega,\,z_n\omega),$$

und da sie auch homogen ist, so kommt

$$\varphi(X_1Y_1Z_1,\dots X_nY_nZ_n) = \omega^\lambda.\varphi(x_1y_1z_1,\dots x_ny_nz_n),$$

d. h. der Ausdruck φ ist eine Invariante.

II.

Bestimmung der Invarianten.

Invarianten erster Ordnung sind offenbar alle homogenen Functionen von $X_1Y_1Z_1$ und nur diese.

Ehe wir die allgemeine Aufgabe „*alle Invarianten nter Ordnung herzustellen*" in Betracht ziehen, wollen wir zuerst untersuchen, ob es Invarianten giebt, welche linear in Bezug auf $X_nY_nZ_n$, also von der Form

$$A_nX_n+B_nY_n+C_nZ_n+D$$

sind.

Nach der zweiten Eigenschaft müssen die $A_nB_nC_n$ Invarianten von niedrigerer Ordnung und von einem und demselben Grade sein. Folglich wird der Ausdruck $A_nX_n+B_nY_n+C_nZ_n+D$ durch die Transformation (σ.) übergehen in:

$$A_n\omega^r\left(\omega x_n+(n-1)\omega_1 x_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\omega_2 x_{n-2}+\cdots+\omega_{n-1}x_1\right)$$
$$+B_n\omega^r\left(\omega y_n+(n-1)\omega_1 y_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\omega_2 y_{n-2}+\cdots+\omega_{n-1}y_1\right)$$
$$+C_n\omega'\left(\omega z_n+(n-1)\omega_1 z_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\omega_2 z_{n-2}+\cdots+\omega_{n-1}z_1\right)$$
$$+D'.$$

Soll nun dieser Ausdruck unabhängig von $\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1}$ sein, so muss D' keine höhere, als die erste Potenz derselben enthalten. Dieses geschieht nun offenbar, wenn D von der Form ist

$$\Sigma(A_\nu X_\nu+B_\nu Y_\nu+C_\nu Z_\nu) \qquad (\nu=2,3,4,\ldots(n-1)),$$

worin $A_\nu B_\nu C_\nu$ Invarianten sind.

Wir wollen deshalb untersuchen, ob es Invarianten Θ giebt, welche folgende Form haben

$$(5.)\qquad \Theta = \sum_\nu(A_\nu X_\nu+B_\nu Y_\nu+C_\nu Z_\nu) \qquad (\nu=2,3,4,\ldots n).$$

In diesem Ausdrucke wird die Substitution $(\sigma.)$ offenbar nur die ersten Potenzen von $\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1}$ hervorbringen. Drücken wir also aus, dass er unabhängig von $\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1}$ bleiben soll, so werden wir $n-1$ Gleichungen erhalten, worin die $3n-3$ unbekannten Coefficienten $A_2B_2C_2,\ \ldots\ A_nB_nC_n$ vorkommen. Daraus erhellt, dass einige unter ihnen beliebig gewählt werden können. Wir nehmen also an

$$B_2=B_3=B_4=\cdots=B_{n-1}=0.$$
$$C_2=C_3=C_4=\cdots=C_{n-1}=0.$$

so dass wir den Ausdruck zu untersuchen haben

$$(6.)\qquad \Theta = A_2X_2+A_3X_3+\cdots+A_{n-1}X_{n-1}+A_nX_n+B_nY_n+C_nZ_n.$$

Soll nun dieser Ausdruck invariant sein, so muss er homogen in Bezug auf alle Ableitungen sein und das System der Gleichungen (4.) erfüllen. Dieses wird jetzt (weil $A_\nu B_\nu C_\nu$ Invarianten, also unabhängig von $\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1}$ sind):

$$(n-1)(A_nX_{n-1}+B_nY_{n-1}+C_nZ_{n-1})+\sum_\nu(\nu-1)A_\nu X_{\nu-1} \qquad = 0,$$
$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(A_nX_{n-2}+B_nY_{n-2}+C_nZ_{n-2})+\sum_\nu\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}A_\nu X_{\nu-2}=0 \quad (\nu=1,2,3,\ldots n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_nX_1+B_nY_1+C_nZ_1 = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die A_ν aus dem Ausdrucke (6.)

eliminiren, und man bekommt alsdann folgende Gleichung

$$X_1^{n-1}.\Theta = B_n.\begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & Y_n \\ X_1 & 2X_2 & 3X_3 & \cdots & (n-1)X_{n-1} & (n-1)Y_{n-1} \\ 0 & X_1 & 3X_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}X_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Y_{n-2} \\ 0 & 0 & X_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}X_{n-3} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}Y_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_1 & Y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+C_n.\begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & Z_n \\ X_1 & 2X_2 & 3X_3 & \cdots & (n-1)X_{n-1} & (n-1)Z_{n-1} \\ 0 & X_1 & 3X_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}X_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Z_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_1 & Z_1 \end{vmatrix}.$$

Da nun B_n, C_n beliebige Invarianten sind, so können wir annehmen $B_n = X_1^{n-1}$, $C_n = 0$, oder umgekehrt $B_n = 0$, $C_n = X_1^{n-1}$; so finden wir folgende zwei Invarianten, die ich mit Q_n, R_n bezeichnen will:

$$Q_n = \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & Y_n \\ X_1 & 2X_2 & 3X_3 & \cdots & (n-1)X_{n-1} & (n-1)Y_{n-1} \\ 0 & X_1 & 3X_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}X_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Y_{n-2} \\ 0 & 0 & X_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}X_{n-3} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}Y_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

$$R_n = \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & Z_n \\ X_1 & 2X_2 & 3X_3 & \cdots & (n-1)X_{n-1} & (n-1)Z_{n-1} \\ 0 & X_1 & 3X_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}X_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Z_{n-2} \\ 0 & 0 & X_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}X_{n-3} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}Z_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_1 & Z_1 \end{vmatrix}$$

Diese sind die einfachsten unter allen Invarianten $n$ter Ordnung. Dass die Ausdrücke Q_n, R_n wirklich Invarianten sind, lässt sich auch unmittelbar beweisen. Zu dem Ende multipliciren wir die Determinante

$$q_n = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n & y_n \\ x_1 & 2x_2 & 3x_3 & \cdots & (n-1)x_{n-1} & (n-1)y_{n-1} \\ 0 & x_1 & 3x_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y_{n-2} \\ 0 & 0 & x_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}x_{n-3} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}y_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

welche aus Q_n hervorgeht, wenn die $X_\nu Y_\nu Z_\nu$ durch die $x_\nu y_\nu z_\nu$ ersetzt werden, mit der Substitutionsdeterminante von (σ.) und (σ'.), nämlich mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1 & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2 & 2\omega_1 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-1} & (n-1)\omega_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\omega_{n-3} & \cdots & \omega \end{vmatrix}.$$

Mit Beachtung der Gleichungen (σ'.) finden wir als Product

$$\begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & Y_n \\ X_1 & 2X_2 & 3X_3 & \cdots & (n-1)X_{n-1} & (n-1)Y_{n-1} \\ 0 & X_1 & 3X_2 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}X_{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Y_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_1 & Y_1 \end{vmatrix},$$

folglich ist

$$Q_n = \omega^n . q_n.$$

Ebenso wird gezeigt, dass

$$R_n = \omega^n . r_n.$$

Die Ausdrücke Q_n, R_n sind also Invarianten.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass alle Determinanten, die aus Q_n, R_n hervorgehen, wenn man die Elemente irgend einer

Colonne durch die entsprechenden Elemente einer anderen Variablen (Y oder Z) ersetzt, Invarianten sind.

Aus den elementaren Invarianten

$$(7.)\quad X_1 Y_1 Z_1, \quad Q_2 R_2, \quad Q_3 R_3, \quad \ldots \quad Q\ R_n$$

lassen sich alle Invarianten der Ordnung n zusammensetzen.

Um dieses zu zeigen, will ich zuerst bemerken, dass die Ableitungen

$$Y_2\ Y_3\ Y_4 \ldots Y_n \quad \text{und} \quad Z_2\ Z_3\ Z_4 \ldots Z_n$$

sich durch die elementaren Invarianten (7.) und die Ableitungen $X_2\ X_3 \ldots X_n$ ausdrücken lassen.

In der That finden wir, wenn wir die Determinante Q_n nach den Elementen der letzten Colonne entwickeln:

$$Q_n = X_1^{n-1} Y_n + M_{n,1} Y_{n-1} + M_{n,2} Y_{n-2} + \cdots + M_{n,n-1} Y_1,$$

wo $M_{n,i}$ aus den Ableitungen $X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_n$ zusammengesetzt ist, folglich ist

$$\begin{aligned}
Q_2 &= X_1 Y_2 - X_2 Y_1, \\
Q_3 &= X_1^2 Y_3 + M_{3,1} Y_2 + M_{3,2} Y_1, \\
Q_4 &= X_1^3 Y_4 + M_{4,1} Y_3 + M_{4,2} Y_2 + M_{4,3} Y_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

u. s. w.

Die erste dieser Gleichungen giebt Y_2 ausgedrückt durch $X_1 Y_1$, Q_2, X_2; die zweite, wenn man den Werth von Y_2 einsetzt, giebt Y_3 ausgedrückt durch $X_1 Y_1$, $Q_2 Q_3$, $X_2 X_3$; die dritte, wenn man die gefundenen Werthe von $Y_2 Y_3$ darin einsetzt, giebt Y_4 ausgedrückt durch $X_1 Y_1$, $Q_2 Q_3 Q_4$, $X_2 X_3 X_4$; und so geht das weiter fort.

Man denke sich nun irgend eine Invariante $n$ter Ordnung

$$\varphi(X_1\ Y_1 Z_1, \ldots X_n\ Y_n Z_n).$$

Wenn man die Ableitungen $Y_2 Y_3 \ldots Y_n$, $Z_2 Z_3 \ldots Z_n$ mit Hülfe von $X_1\ Y_1 Z_1$, $Q_2 Q_3 \ldots Q_n$, $R_2 R_3 \ldots R_n$, $X_2 X_3 \ldots X_n$ ausdrückt und einsetzt, so geht diese Function über in

$$(8.)\quad f(X_1\ Y_1 Z_1,\ Q_2 \ldots Q_n,\ R_2 \ldots R_n,\ X_2\ X_3 \ldots X_n),$$

und da sie invariant ist, so müssen nach der Substitution (σ.) folgende Gleichungen stattfinden:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-1}} = 0.$$

Nun aber ist das ω_{n-1} nur in X_n enthalten, folglich ist

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial X_n}\cdot x_1;$$

es muss also sein $\frac{\partial f}{\partial X_n} = 0$, d. i. die Function f darf X_n nicht enthalten. Ferner ist, da ω_{n-2} nur in X_{n-1} enthalten ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_{n-2}} = \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}}\cdot x_1,$$

also kommt $\frac{\partial f}{\partial X_{n-1}} = 0$, d. i. die Function f darf auch X_{n-1} nicht enthalten.

Auf diese Weise wird nach und nach bewiesen, dass die Function f, falls sie invariant ist, keine von den Ableitungen $X_2 X_3 \dots X_n$ enthalten darf. Folglich muss sie die Form haben

$$(9.)\qquad f(X_1 Y_1 Z_1,\, Q_2 R_2,\, Q_3 R_3,\, \dots\, Q_n R_n).$$

Nun ist aber

$$f(X_1 Y_1 Z_1,\, Q_2 R_2,\, \dots\, Q_n R_n) = f(\omega x_1\, \omega y_1\, \omega z_1,\, \omega^2 q_2\, \omega^2 r_2,\, \dots\, \omega^n q_n\, \omega^n r_n),$$

und da

$$f(X_1 Y_1 Z_1,\, Q_2 R_2,\, \dots\, Q_n R_n) = \omega^i f(x_1 y_1 z_1,\, q_2 r_2,\, \dots\, q_n r_n)$$

sein soll, so schliessen wir, dass die Function f nur noch die Gleichung

$$f(\omega x_1\, \omega y_1\, \omega z_1,\, \omega^2 q_2\, \omega^2 r_2,\, \dots\, \omega^n q_n\, \omega^n r_n) = \omega^\lambda f(x_1 y_1 z_1,\, q_2 r_2,\, \dots\, q_n r_n)$$

zu erfüllen hat, um invariant zu sein.

Diese Gleichung drückt aus, dass f homogen in Bezug auf $X_1 Y_1 Z_1$, $Q_2 R_2, \dots Q_n R_n$ ist, wenn die Dimension von $Q_i R_i$ gleich ihrem Grade i angenommen wird.

Dass auch umgekehrt jede solche Function der elementaren Invarianten (7.) wieder invariant ist, wird aus dem Vorhergehenden unmittelbar klar.

Anmerkung. Jede Function von $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$, $\dots$ $X_n Y_n Z_n$ kann auf die Form

$$f(X_1 Y_1 Z_1,\, Q_2 R_2,\, Q_3 R_3,\, \dots\, Q_n R_n,\, X_2 X_3 \dots X_n)$$

gebracht werden; soll sie also nach der Transformation (σ.) nur von ω und ω_1 abhängen, so muss sie die $X_3 X_4 \dots X_n$ nicht enthalten, d. h. von der Form sein

$$\varphi(X_1 Y_1 Z_1,\, Q_2 R_2,\, Q_3 R_3,\, \dots\, Q_n R_n,\, X_2)$$

oder

$$\varphi(X_1 Y_1 Z_1,\, X_2 Y_2 Z_2,\, Q_3 R_3,\, \dots\, Q_n R_n).$$

III.

Anwendung.

Es sei eine Differentialgleichung

$$(10.)\qquad f(X_1 Y_1 Z_1,\ X_2 Y_2 Z_2, \dots X_n Y_n Z_n) = \varkappa,$$

deren erstes Glied eine Invariante, während das zweite eine von Null verschiedene Constante ist; wir nehmen noch an, dass der Grad λ der Invariante f verschieden von Null ist.

Um alle Lösungen dieser Gleichung zu finden, setze man

$$(11.)\qquad X_1 = \omega x_1,\quad Y_1 = \omega y_1,\quad Z_1 = \omega z_1,$$

dann kommt

$$f(X_1 Y_1 Z_1,\ X_2 Y_2 Z_2, \dots X_n Y_n Z_n) = \omega^\lambda . f(x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2, \dots x_n y_n z_n),$$

so dass die gegebene Gleichung (10.) wird

$$\omega^\lambda . f(x_1 y_1 z_1, \dots x_n y_n z_n) = \varkappa.$$

Diese Gleichung wird aber befriedigt, welches auch die Functionen x, y, z sein mögen, wenn wir nehmen

$$\omega = \sqrt[\lambda]{\varkappa} f(x_1 y_1 z_1, \dots x_n y_n z_n)^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

Daher folgen aus den Gleichungen (11.) für die Unbekannten X, Y, Z folgende Werthe

$$(12.)\qquad \begin{cases} X = \sqrt[\lambda]{\varkappa} \int f(x_1 y_1 z_1, \dots x_n y_n z_n)^{-\frac{1}{\lambda}} dx, \\ Y = \sqrt[\lambda]{\varkappa} \int f(x_1 y_1 z_1, \dots x_n y_n z_n)^{-\frac{1}{\lambda}} dy, \\ Z = \sqrt[\lambda]{\varkappa} \int f(x_1 y_1 z_1, \dots x_n y_n z_n)^{-\frac{1}{\lambda}} dz. \end{cases}$$

Als Beispiel suchen wir alle Curven, deren zweiter Krümmungsradius r constant ist. Wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varDelta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

so werden die gesuchten Curven durch folgende Gleichung definirt:

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{\varDelta} = \varkappa.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist eine Invariante; wenn wir also setzen

$$(13.)\qquad X_1 = x_1\omega,\quad Y_1 = y_1\omega,\quad Z_1 = z_1\omega,$$

so kommt

$$\omega\,\frac{a^2+b^2+c^2}{\delta} = \varkappa,\quad \text{also}\quad \omega = \frac{\varkappa.\delta}{a^2+b^2+c^2},$$

wo a, b, c, δ aus A, B, C, $\varDelta$ hervorgehen, wenn man die X_ν Y_ν Z_ν durch die x_ν y_ν z_ν ersetzt.

Setzen wir nun diesen Werth von ω in die Gleichungen (13.) ein, und integriren, so finden wir für die Coordinaten X, Y, Z der gesuchten Curven folgende Werthe:

$$(14.)\qquad \begin{cases} X = \varkappa\displaystyle\int\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2}\,dx = \varkappa\int\frac{dx}{r}, \\ Y = \varkappa\displaystyle\int\frac{\delta'}{a^2+b^2+c^2}\,dy = \varkappa\int\frac{dy}{r}, \\ Z = \varkappa\displaystyle\int\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2}\,dz = \varkappa\int\frac{dz}{r}. \end{cases}$$

In diesen Formeln bedeuten x, y, z beliebige Functionen einer Variabeln t, oder, was dasselbe ist, die Coordinaten einer beliebig gewählten Curve, und r den zweiten Krümmungsradius derselben.

Nimmt man z. B. $x_1 = 1$, $y_1 = t$, $z_1 = t^2$, so findet man die Curve

$$X = 2\varkappa\int\frac{dt}{1+4t^2+t^4},$$

$$Y = 2\varkappa\int\frac{t\,dt}{1+4t^2+t^4},$$

$$Z = 2\varkappa\int\frac{t^2\,dt}{1+4t^2+t^4}.$$

Nimmt man aber $x_1 = n\cos t$, $y_1 = n\sin t$, so findet man

$$X = n\varkappa\int\frac{(z_1+z_3)\cos t\,dt}{z_1^2+z_2^2+n^2},\quad Y = n\varkappa\int\frac{(z_1+z_3)\sin t\,dt}{z_1^2+z_2^2+n^2},\quad Z = \varkappa\int\frac{(z_1+z_3)z_1\,dt}{z_1^2+z_2^2+n^2},$$

woraus man die gewöhnliche Schraubenlinie findet, wenn man $z_1 = 1$ setzt.

Auf ähnliche Weise findet man, dass die Curven, bei denen die beiden Krümmungsradien ein constantes Product $\varkappa$ haben, durch die Formeln gegeben sind

$$(15.)\qquad X = \sqrt{\varkappa}\int\frac{dx}{\sqrt{\varrho r}},\quad Y = \sqrt{\varkappa}\int\frac{dy}{\sqrt{\varrho r}},\quad Z = \sqrt{\varkappa}\int\frac{dz}{\sqrt{\varrho r}},$$

wo ϱ und r die Krümmungsradien der beliebig gewählten Curve (x, y, z) bedeuten.

Als zweites Beispiel diene die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \varkappa \quad \text{oder} \quad \Delta = \varkappa.$$

Nach der Substitution (σ.) geht sie über in $\delta.\omega^3 = \varkappa$, oder

$$\omega = \sqrt[3]{\frac{\varkappa}{\delta}};$$

folglich sind alle Lösungen derselben in den Formeln enthalten

$$(16.)\qquad X = \sqrt[3]{\varkappa}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\delta}},\quad Y = \sqrt[3]{\varkappa}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\delta}},\quad Z = \sqrt[3]{\varkappa}\int\frac{dz}{\sqrt[3]{\delta}}.$$

Will man aus diesen Formeln die Auflösung der Gleichung $\Delta = 0$ ableiten, so muss man $\varkappa$ bis zum Verschwinden abnehmen lassen, dabei muss man aber, wegen der Gleichung $\omega^3.\delta = \varkappa$, auch δ bis zum Verschwinden abnehmen lassen.

Zu dem Ende nehme man für die willkürlichen Functionen x, y, z folgende Werthe an

$$\begin{aligned} x_1 &= A + B\,t + C\,t^2, \\ y_1 &= A' + B'\,t + C'\,t^2, \\ z_1 &= A'' + B''t + C''t^2, \end{aligned}$$

dann ist

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},$$

und die Formeln (16.) geben

$$\begin{aligned} X &= \sqrt[3]{\frac{\varkappa}{\delta}}(A\,t + \tfrac{1}{2}B\,t^2 + \tfrac{1}{3}C\,t^3) + P, \\ Y &= \sqrt[3]{\frac{\varkappa}{\delta}}(A'\,t + \tfrac{1}{2}B'\,t^2 + \tfrac{1}{3}C'\,t^3) + P', \\ Z &= \sqrt[3]{\frac{\varkappa}{\delta}}(A''t + \tfrac{1}{2}B''t^2 + \tfrac{1}{3}C''t^3) + P'', \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{vmatrix} X-P & B & C \\ Y-P' & B' & C' \\ Z-P'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = t\sqrt[3]{\varkappa}.\delta^{\frac{2}{3}}.$$

Lässt man also $\varkappa$ und δ bis zum Verschwinden abnehmen, so findet man

$$\begin{vmatrix} X-P & B & C \\ Y-P' & B' & C' \\ Z-P'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta X+\Theta' Y+\Theta'' Z+H = 0,$$

welches die allgemeine Lösung der Gleichung $\varDelta = 0$ ist.

Ich will noch bemerken, dass die Auflösung jeder Gleichung von der Form

$$S = \varphi(P, R),$$

wo P und R die beiden Krümmungsradien und S den Arcus der gesuchten Curve bedeuten, sich auf die Auflösung einer Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt. Denn aus der gegebenen Gleichung folgt

$$dS = \varphi_1'(P, R)dP+\varphi_2'(P, R)dR$$

und nach der Transformation (σ.)

$$\omega ds = \varphi_1'(\varrho\omega, r\omega)d(\omega\varrho)+\varphi_2'(\varrho\omega, r\omega).d(\omega r),$$

eine Gleichung, worin nur ω und $d\omega$ enthalten sind. Hat man das ω aus dieser Gleichung bestimmt, so werden die Coordinaten X, Y, Z durch folgende Formeln gegeben

$$X = \int \omega dx, \quad Y = \int \omega dy, \quad Z = \int \omega dz.$$

Athen, den 18. Januar 1888.

Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Die Abhandlung „über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten", welche der Verfasser im 102. Bande dieses Journals veröffentlicht hat, enthält ein Verfahren, durch Einführung eines bestimmten Integrals gewisse lineare Differentialgleichungen auf solche von niedrigerer Ordnung zurückzuführen. Diese Methode soll im Folgenden auf drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung, welche den dort behandelten Gleichungen nahe stehen, angewendet werden. Durch die Substitution

$$(1.)\qquad y = \int_g^h (w-x)^{-\delta}\,\mathfrak{W}\,dw$$

wurde im § 5 der genannten Arbeit die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(2.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad f_4(x)\,\frac{d^4y}{dx^4} + [(\delta+3)_1 f_4'(x) - f_3(x)]\,\frac{d^3y}{dx^3} \\ + [(\delta+3)_2 f_4''(x) - (\delta+2)_1 f_3'(x) + f_2(x)]\,\frac{d^2y}{dx^2} \\ + [(\delta+3)_3 f_4'''(x) - (\delta+2)_2 f_3''(x) + (\delta+1)_1 f_2'(x) - f_1(x)]\,\frac{dy}{dx} \\ + [(\delta+3)_4 f_4^{\mathrm{IV}}(x) - (\delta+2)_3 f_3'''(x) + (\delta+1)_2 f_2''(x) - (\delta)_1 f_1'(x)]\,y \end{array}\right\} = 0,$$

in welcher (für $\nu = 1, 2, 3, 4$) $f_\nu(x)$ eine ganze Function νten oder niedrigeren Grades von x, ferner δ eine Constante und $(\delta+3)_\nu$ etc. Binomialcoefficienten bezeichneten, auf die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(3.)\qquad \frac{d^3(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw^3} - \frac{d^2(f_3(w)\mathfrak{W})}{dw^2} + \frac{d(f_2(w)\mathfrak{W})}{dw} - f_1(w)\,\mathfrak{W} = 0$$

reducirt. Nachdem sodann die von w allein abhängige Function $\mathfrak{W}$ gleich dem Product aus einer Potenz von w und einer neuen Unbekannten W ge-

setzt worden war, konnte die aus (3.) entstehende Differentialgleichung für die Grösse W, wenn die Functionen $f_1, \dots f_4$ in bestimmter Weise gewählt wurden, in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten übergeführt werden.

Diese Rechnung wird in dem nachstehenden Aufsatze in zweifacher Art modificirt. Einerseits ergiebt sich, dass nach Anwendung der Substitution

$$\mathfrak{W} = (w-1)^p W,$$

wo p eine Constante bedeutet, die Differentialgleichung der Function W für passende Werthe von $f_1, \dots f_4$ ebenfalls auf die Gleichung der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten zurückkommt. Andererseits lassen sich die ganzen Functionen $f_1, \dots f_4$ derartig wählen, dass die Grösse $\mathfrak{W}$, abgesehen von einem Potenzfactor, in eine hypergeometrische Function dritter Ordnung mit drei endlichen singulären Punkten übergeht, wie solche vom Verfasser in einer früheren Arbeit*) definirt worden ist. Man gelangt auf diese Weise zu zwei linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung (im Folgenden durch die Nummern (16.) und (52.) bezeichnet), von denen die eine durch dreifache, die andere durch doppelte bestimmte Integrale gelöst wird. Die erwähnte Abhandlung im 102. Bande dieses Journals ist hier (wenn auf sie verwiesen wird) kurz durch Abh. bezeichnet worden.

Die dritte Differentialgleichung vierter Ordnung, auf welche hier eingegangen werden soll, bildet einen speciellen Fall der Gleichung (2.), für den die Grösse $\mathfrak{W}$ sich durch eine hypergeometrische Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen lässt. Als Lösung dieser Gleichung vierter Ordnung ergeben sich, wie bei der vorher betrachteten, Systeme von Doppelintegralen.

In den §§ 1—5 des nachstehenden Aufsatzes ist die erste, in §§ 6—8 die zweite, in § 9 die dritte der genannten Differentialgleichungen vierter Ordnung behandelt worden.

§ 1.

Die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(4.)\quad \left\{ \begin{array}{l} w^2(w-1)\dfrac{d^3W}{dw^3} + w[(\alpha'+\beta'+\gamma'+3)w-(\varrho'+\sigma'+1)]\dfrac{d^2W}{dw^2} \\ +[(\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'+\alpha'\beta'+\alpha'+\beta'+\gamma'+1)w-\varrho'\sigma']\dfrac{dW}{dw}+\alpha'\beta'\gamma' W \end{array} \right\} = 0,$$

*) Dieses Journal, Bd. 71, pag. 316, und Bd. 73, pag. 85.

welcher die hypergeometrische Reihe

$$(5.)\quad \begin{cases} F(\alpha', \beta', \gamma'; \varrho', \sigma'; w) = 1 + \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{1.\varrho'\sigma'} w + \frac{\alpha'(\alpha'+1)\beta'(\beta'+1)\gamma'(\gamma'+1)}{1.2.\varrho'(\varrho'+1)\sigma'(\sigma'+1)} w^2 \\ \quad + \frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)\gamma'(\gamma'+1)(\gamma'+2)}{1.2.3.\varrho'(\varrho'+1)(\varrho'+2)\sigma'(\sigma'+1)(\sigma'+2)} w^3 + \cdots \end{cases}$$

genügt, wird (nach § 2 der Abh.) durch bestimmte Doppelintegrale von der Form

$$(6.)\quad W = \int_{g_2}^{h_2} (v-w)^{-\gamma'} v^{\gamma'-\sigma'} dv \int_{g_1}^{h_1} (u-v)^{\sigma'-\beta'-1} u^{\beta'-\varrho'} (u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} du$$

gelöst, in denen g_1, h_1 zwei der vier Werthe 0, 1, ∞, v, und g_2, h_2 zwei der vier Werthe 0, 1, ∞, w bedeuten. Die Anwendung der Substitution

$$(7.)\quad W = (w-1)^{-p}\mathfrak{W},\quad \mathfrak{W} = (w-1)^p W$$

auf die Gleichung (4.) liefert für $\mathfrak{W}$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit ganzen rationalen Coefficienten, in welcher der Factor der höchsten Ableitung von $\mathfrak{W}$ im Allgemeinen gleich der Function fünften Grades $w^2(w-1)^3$ ist. Für den speciellen Werth

$$(8.)\quad p = \alpha'+\beta'+\gamma'-\varrho'-\sigma'$$

reducirt sich jedoch, indem die Differentialgleichung durch $w-1$ theilbar wird, der genannte Factor auf $w^2(w-1)^2$. In diesem Falle besitzt, da zu (4.) ein particuläres Integral von der Form

$$(w-1)^{\varrho'+\sigma'-\alpha'-\beta'-\gamma'} \{1 + k_1(w-1) + k_2(w-1)^2 + \cdots\}$$

gehört, die Differentialgleichung für $\mathfrak{W}$ ein particuläres Integral, welches in der Umgebung des Punktes $w = 1$ eindeutig und stetig ist und für $w = 1$ nicht verschwindet.

In der anfangs erwähnten Differentialgleichung (3.) ist die höchste Ableitung der Unbekannten mit der ganzen Function vierten Grades $f_4(w)$ multiplicirt. Soll die Gleichung (3.) mit derjenigen Differentialgleichung, die aus (4.) und (7.) für $\mathfrak{W}$ entsteht, gleichlautend werden, so ist zunächst erforderlich, dass p gleich der Constante (8.) gesetzt werde, wodurch $f_4(w)$ den Werth $w^2(w-1)^2$ annimmt.

Man führt die Identificirung der zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung in der Art durch, dass man auch die Gleichung (3.) mittelst der Substitution (7.) umformt. Hierdurch entsteht die Differentialgleichung:

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^3[(w-1)^p f_4(w)W]}{dw^3} - \frac{d^2[(w-1)^p f_3(w)W]}{dw^2} \\ & + \frac{d[(w-1)^p f_2(w)W]}{dw} - (w-1)^p f_1(w) W \end{aligned}\right\} = 0,$$

in welcher die höchste Ableitung von W den Coefficienten $(w-1)^p f_4(w)$ hat.

Es werden nun, nachdem man die Gleichung (4.)' mit $(w-1)^{p+1}$ multiplicirt hat, in derselben die Coefficienten der Grösse W und ihrer Ableitungen den entsprechenden Coefficienten in (9.) gleichgesetzt, während p den Werth (8.) bedeutet. Hierdurch ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung für die Coefficienten von (4.) die Bezeichnung

$$(10.)\quad \begin{cases} G_3(w) = w^2(w-1), \quad G_2(w) = w[(\alpha'+\beta'+\gamma'+3)w-(\varrho'+\sigma'+1)], \\ G_1(w) = (\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'+\alpha'\beta'+\alpha'+\beta'+\gamma'+1)w-\varrho'\sigma', \quad G_0 = \alpha'\beta'\gamma' \end{cases}$$

anwendet, das Gleichungssystem:

$$(w-1)^p f_4(w) = (w-1)^{p+1} G_3(w),$$

$$-(w-1)^p f_3(w) + 3\frac{d[(w-1)^p f_4(w)]}{dw} = (w-1)^{p+1} G_2(w),$$

$$(w-1)^p f_2(w) - 2\frac{d[(w-1)^p f_3(w)]}{dw} + 3\frac{d^2[(w-1)^p f_4(w)]}{dw^2} = (w-1)^{p+1} G_1(w),$$

$$\left.\begin{aligned} & -(w-1)^p f_1(w) + \frac{d[(w-1)^p f_2(w)]}{dw} \\ & - \frac{d^2[(w-1)^p f_3(w)]}{dw^2} + \frac{d^3[(w-1)^p f_4(w)]}{dw^3} \end{aligned}\right\} = (w-1)^{p+1} G_0.$$

Durch Auflösung desselben findet man für die Functionen f_ν die Ausdrücke

$$(11.)\quad \begin{cases} f_4(w) = (w-1)G_3(w) = w^2(w-1)^2, \\ f_3(w) = [3G_3'(w) - G_2(w)](w-1) + 3(p+1)G_3(w), \\ f_2(w) = [3G_3''(w) - 2G_2'(w) + G_1(w)](w-1) \\ \qquad + 2(p+1)[3G_3'(w) - G_2(w)] + 3(p+1)pw^2, \\ f_1(w) = [G_3'''(w) - G_2''(w) + G_1'(w) - G_0](w-1) \\ \qquad + (p+1)[3G_3''(w) - 2G_2'(w) + G_1(w)] - (p+1)p(\varrho'+\sigma'-5)w, \end{cases}$$

deren Grad der vorgeschriebene ist.

Die Grösse p verbindet man mit einer anderen Constante $\varkappa$ durch die Gleichung

$$(12.)\quad p = \delta - \varkappa,$$

so dass aus (1.) nach Berücksichtigung von (7.) die Gleichung

$$(13.)\quad y = \int_g^h (w-x)^{-\delta}(w-1)^{\delta-\varkappa}\, W\,dw$$

erhalten wird, in welcher W eine particuläre Lösung von (4.) bedeutet. Man führt ferner statt α', β', γ', ϱ', σ' fünf andere Constante α, β, γ, ϱ, σ ein, indem man setzt

$$(14.)\quad \begin{cases} \alpha' = \alpha-\varkappa+1, \quad \beta' = \beta-\varkappa+1, \quad \gamma' = \gamma-\varkappa+1, \\ \varrho' = \varrho-\delta+1, \quad \sigma' = \sigma-\delta+1. \end{cases}$$

Die Gleichung (8.) transformirt sich in Folge von (12.) und (14.) in die Relation

$$(15.)\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\varkappa+\varrho+\sigma-1.$$

Nach Substitution der Werthe (11.), genommen für das Argument x, und nach Berücksichtigung der Gleichungen (10.), (12.) und (14.) geht die Differentialgleichung (2.) in die folgende über

$$(16.)\quad \begin{cases} x^2(x-1)^2 \dfrac{d^4y}{dx^4} + x(x-1)\{(A_1+6)x-(\varrho+\sigma+3)\} \dfrac{d^3y}{dx^3} \\ +\{(A_2+3A_1+7)x(x-1)+\varkappa(\varkappa+1)x-(\varrho+1)(\sigma+1)(x-1)\} \dfrac{d^2y}{dx^2} \\ +\{(A_3+A_2+A_1+1)(x-1)+\varkappa(A_2+2A_1+3)-\varkappa(\varrho+\varkappa+1)(\sigma+\varkappa+1)\} \dfrac{dy}{dx} \\ +A_4 y = 0, \end{cases}$$

woselbst A_1, A_2, A_3, A_4 die Constanten

$$(17.)\quad \begin{cases} A_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta, \\ A_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta, \\ A_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta, \\ A_4 = \alpha\beta\gamma\delta \end{cases}$$

bedeuten.

Man setzt voraus, dass die Constanten α, β, γ, δ, $\varkappa$, ϱ, σ ausser der Gleichung (15.) die Bedingung erfüllen, dass keine der Grössen

$$\varkappa,\ \varrho,\ \sigma,\ \varrho-\sigma,\ \alpha-\beta,\ \alpha-\gamma,\ \alpha-\delta,\ \beta-\gamma,\ \beta-\delta,\ \gamma-\delta$$

gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei.

§ 2.

Das bestimmte Integral (13.) ist (nach § 5 der Abh.) eine Lösung der Differentialgleichung (16.), falls die Grenzen g und h der Bedingung

$$[M]_{w=h}-[M]_{w=g} = 0$$

genügen, in welcher M den Ausdruck

$$(18.)\quad M = \begin{cases} -(\delta+1)(\delta+2)(w-x)^{-\delta-3}f_4(w)\mathfrak{W} \\ +(\delta+1)(w-x)^{-\delta-2}\left[f_3(w)\mathfrak{W}-\frac{d(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw}\right] \\ -(w-x)^{-\delta-1}\left[f_2(w)\mathfrak{W}-\frac{d(f_3(w)\mathfrak{W})}{dw}+\frac{d^2(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw^2}\right] \end{cases}$$

bezeichnet. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Grösse M für $w = g$ und für $w = h$ den Werth Null annimmt.

Man erkennt zunächst, dass, wenn die Zahl $\delta+3$ in ihrem reellen Theil negativ ist, M für $w = x$ verschwindet. Der Werth x, der neben constanten Werthen als Grenze des Integrals (13.) zulässig ist, darf also im Falle $\delta < -3$ für g oder h gesetzt werden, während die in (13.) vorkommende Grösse W ein beliebiges particuläres Integral von (4.) bedeutet. Um zu untersuchen, in welchen Fällen der Werth ∞ als Grenze des Integrals (13.) angewendet werden darf, entwickelt man die Function M nach fallenden Potenzen von w. Zu diesem Behuf ist in das Product

$$\mathfrak{W} = (w-1)^{\delta-\varkappa}W$$

für W der Ausdruck

$$W = c_1 w^{\varkappa-\alpha-1}F\left(\alpha-\varkappa+1,\ \alpha+\delta-\varkappa-\varrho+1,\ \alpha+\delta-\varkappa-\sigma+1;\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1;\ \frac{1}{w}\right)$$
$$+c_2 w^{\varkappa-\beta-1}F\left(\beta-\varkappa+1,\ \beta+\delta-\varkappa-\varrho+1,\ \beta+\delta-\varkappa-\sigma+1;\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{w}\right)$$
$$+c_3 w^{\varkappa-\gamma-1}F\left(\gamma-\varkappa+1,\ \gamma+\delta-\varkappa-\varrho+1,\ \gamma+\delta-\varkappa-\sigma+1;\ \gamma-\alpha+1,\ \gamma-\beta+1;\ \frac{1}{w}\right),$$

in welchem F das Functionszeichen (5.), und c_1, c_2, c_3 Constante bedeuten, zu substituiren, da (nach § 4 der Abh.) das allgemeine Integral der Gleichung (4.) im Gebiet der grossen Werthe von w die obige Form hat. Es ergiebt sich, dass M für $w = \infty$ verschwindet, falls

$$\alpha > 0,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0$$

ist. Sobald daher die letzteren Ungleichheiten (welche sich im Falle complexer α, β, γ auf die reellen Bestandtheile beziehen) erfüllt sind, ist es erlaubt, den Werth ∞ als Grenze des Integrals (13.) einzuführen, ohne dass hieraus eine Beschränkung in Bezug auf die Wahl des particulären Integrals W folgte.

Für die Grenzen g, h kann man ausserdem den Werth 0 und den Werth 1 anwenden; indessen dürfen alsdann in (13.) für die Grösse W nur gewisse particuläre Lösungen der Differentialgleichung (4.) eingesetzt werden. In der Umgebung des Punktes $w = 0$ hat die Gleichung (4.) die drei Haupt-

integrale (Gl. (28.) und (30.) der Abh.)

$$F(\alpha-\varkappa+1,\ \beta-\varkappa+1,\ \gamma-\varkappa+1;\ \varrho-\delta+1,\ \sigma-\delta+1;\ w),$$

$$w^{\delta-\varrho}F(\alpha+\delta-\varkappa-\varrho+1,\ \beta+\delta-\varkappa-\varrho+1,\ \gamma+\delta-\varkappa-\varrho+1;\ \delta-\varrho+1,\ \sigma-\varrho+1;\ w),$$

$$w^{\delta-\sigma}F(\alpha+\delta-\varkappa-\sigma+1,\ \beta+\delta-\varkappa-\sigma+1,\ \gamma+\delta-\varkappa-\sigma+1;\ \delta-\sigma+1,\ \varrho-\sigma+1;\ w).$$

Wird das erstgenannte Integral für W substituirt, so nimmt M für $w=0$ nicht den Werth Null, sondern den Werth

$$(-1)^{\varkappa}(\varrho-\delta)(\sigma-\delta)x^{-\delta-1}$$

an. Das bestimmte Integral (13.) liefert daher, wenn für W dieser Ausdruck gewählt und eine der Grenzen g, h gleich 0 genommen wird, im Allgemeinen nur Lösungen einer nicht homogenen Differentialgleichung, dagegen keine Lösungen von (16.). Wählt man für W das zweite oder das dritte der obigen Hauptintegrale, resp. ein aus ihnen linear zusammengesetztes Binom, so verschwindet M für $w=0$, falls die Zahlen $\delta-\varrho+1$ und $\delta-\sigma+1$ (in den reellen Bestandtheilen) positiv sind. In ihrer Darstellung durch bestimmte Doppelintegrale lauten, abgesehen von constanten Factoren, die letzteren Hauptintegrale der Gleichung (4.) — cf. die Ausdrücke (24.) der Abh. —

$$(19.)\qquad \int_0^w dv\int_0^v \Phi(u,v,w)\,du,\qquad \int_0^w dv\int_1^\infty \Phi(u,v,w)\,du,$$

wo zur Abkürzung

$$(20.)\qquad \begin{cases} \Phi(u,v,w) = (v-w)^{-\gamma'}v^{\gamma'-\sigma'}(u-v)^{\sigma'-\beta'-1}u^{\beta'-\varrho'}(u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} \\ \qquad = (v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}(u-v)^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}u^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(u-1)^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1} \end{cases}$$

gesetzt ist. Also ist in (13.) im Fall $\varrho<\delta+1$, $\sigma<\delta+1$ der Werth 0 als Integralgrenze g oder h zulässig, wenn man gleichzeitig für W eine particuläre Lösung von (4.) substituirt, welche sich linear durch die zwei Integrale (19.) ausdrücken lässt.

In dem Bezirk des Punktes $w=1$ existirt nur ein einziges mehrdeutiges Hauptintegral der Gleichung (4.), das, wie bereits im § 1 erwähnt wurde, die Form

$$(w-1)^{-p}\{1+k_1(w-1)+k_2(w-1)^2+\cdots\}$$

hat. Wählt man W gleich diesem (wodurch $\mathfrak{W}$ eindeutig und stetig wird), so nimmt die Grösse M für $w=1$ den von Null verschiedenen Werth

$$-(\delta-\varkappa)(\delta-\varkappa+1)(1-x)^{-\delta-1}$$

an. Ist dagegen W ein bei dem Punkte $w=1$ eindeutiges particuläres Integral von (4.) (mit dem Anfangsexponenten 0 oder 1), so verschwindet M für $w=1$, sobald der reelle Bestandtheil der Zahl $\delta-\varkappa+1$ positiv ist. Demnach darf man in (13.) den Werth 1 für g oder h anwenden, falls

für W eine bei $w = 1$ eindeutige Lösung der Differentialgleichung (4.) substituirt wird, und $\varkappa < \delta+1$ ist. Unter den Doppelintegralen (6.) sind diejenigen, welche in Bezug auf die Variable v die Grenzen 0 und ∞ haben, als eindeutig in der Umgebung des Punktes $w = 1$ bewiesen worden (§ 4 der Abh.). Der soeben genannten Bedingung für W wird demgemäss genügt, wenn man W gleich einem Integral

$$(21.)\qquad \int_0^\infty dv \int_{g_2}^{h_2} \Phi(u, v, w)\,du$$

setzt, in welchem $\Phi(u, v, w)$ die Function (20.), und die Grenzen g_2, h_2 zwei beliebige der Werthe 0, 1, ∞, v bedeuten, resp. wenn W gleich einer Summe derartiger, mit willkürlichen Constanten multiplicirter Integrale ist. Man kann in diesem Falle die Gleichung für W auf die Form

$$(22.)\qquad W = \int_0^\infty (v-w)^{-\gamma'} v^{\gamma'-\sigma'} V dv = \int_0^\infty (v-w)^{\varkappa-\gamma-1} v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma} V dv$$

bringen, wo V entweder ein Integral

$$(23.)\qquad V = \int_{g_1}^{h_1} (u-v)^{\alpha'-\beta'-1} u^{\beta'-\varrho'} (u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} du$$

$(g_1, h_1 = 0, 1, \infty, v)$ oder eine Summe solcher, mit Constanten multiplicirter Integrale bezeichnet. Die Grösse V ist nach der letzteren Definition ein beliebiges particuläres Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(24.)\qquad \begin{cases} v(v-1)\dfrac{d^2V}{dv^2} + [(\alpha'+\beta'-2\sigma'+3)v - (\varrho'-\sigma'+1)]\dfrac{dV}{dv} \\ \qquad\qquad + (\alpha'-\sigma'+1)(\beta'-\sigma'+1)V = 0, \end{cases}$$

in welcher α', β', ϱ', σ' die Constanten (14.) sind.

Durch die obigen Rechnungen sind 0, 1, ∞, x als Werthe der Grenzen g, h des Integrals (13.) ermittelt worden. Indem man für W die verschiedenen zulässigen Ausdrücke (6.) substituirt, ergeben sich aus (13.) particuläre Lösungen der Differentialgleichung (16.) in Gestalt dreifacher bestimmter Integrale. Unter diesen sind zunächst gewisse Hauptintegrale der Gleichung (16.) hervorzuheben. Im Gebiet der grossen Werthe von x findet man vier mehrdeutige Hauptintegrale, welche gleich dem Product aus einer Potenz von x (nämlich $x^{-\alpha}$, $x^{-\beta}$, $x^{-\gamma}$, $x^{-\delta}$) und einer in diesem Gebiete eindeutigen Function von x sind. In der Umgebung des Punktes $x = 0$ hat man zwei mehrdeutige Hauptlösungen, in deren Entwickelung (nach steigenden Potenzen von x) die Anfangspotenz gleich $x^{1-\varrho}$, resp. $x^{1-\sigma}$ ist. Im Uebrigen kann man Hauptintegrale für diesen Theil der

x-Ebene nicht angeben, da zwei bei $x = 0$ eindeutige particuläre Lösungen mit den Anfangsexponenten 0 und 1 existiren, also ein aus ihnen linear zusammengesetztes Binom wieder den Anfangsexponenten 0 hat. Dasselbe gilt von der Umgebung des Punktes $x = 1$; jedoch sind daselbst neben zwei eindeutigen particulären Integralen zwei mehrdeutige vorhanden, welche die Eigenschaft haben, gleich dem Product aus der Potenz $(x-1)^{1-\varkappa}$ und einer bei $x = 1$ eindeutigen Function (mit dem Anfangsexponenten 0, resp. 1) zu sein, so dass ein aus ihnen linear zusammengesetztes Binom die gleiche Eigenschaft besitzt. Im Bezirk des Punktes $x = 1$ giebt es auf diese Weise gar keine Hauptintegrale der Gleichung (16.), denen ein unbedingter Vorzug vor den übrigen zukäme. — In Bezug auf die Wahl der Grenzen g, h des bestimmten Integrals (13.) gilt, wenn die Hauptintegrale von (16.) aufgesucht werden sollen, eine ähnliche Regel wie für die hypergeometrischen Integrale (§§ 7 und 12 der Abh.). Um in irgend einem der Gebiete der singulären Werthe $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ zu particulären Lösungen von (16.) zu gelangen, welche eindeutig sind oder durch Division mit einer Potenz eindeutig werden, hat man in (13.) die Grenzen g und h entweder gleich x und dem betreffenden singulären Werthe oder gleich den übrigen beiden singulären Werthen zu setzen *). Für die Grenzen g_1, h_1, g_2, h_2 des Doppelintegrals (6.), das in (13.) an Stelle von W zu substituiren ist, besteht zum Theil die analoge Regel, ausserdem kommen aber diejenigen Beschränkungen in Betracht, welche im Vorhergehenden für die Function W, im Falle g oder h gleich 0 oder 1 ist, erhalten wurden.

Bevor hierauf eingegangen wird, soll eine Hülfsformel abgeleitet werden.

§ 3.

Wenn in die Gleichung (2.) ein ihr genügendes Integral von der Form (1.) für y eingesetzt wird, so geht dieselbe in die Gleichung

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} &(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)\int_g^h (w-x)^{-\delta-4} f_4(w)\mathfrak{W}\,dw \\ &-(\delta+1)(\delta+2)\int_g^h (w-x)^{-\delta-3} f_3(w)\mathfrak{W}\,dw \\ &+(\delta+1)\int_g^h (w-x)^{-\delta-2} f_2(w)\mathfrak{W}\,dw - \int_g^h (w-x)^{-\delta-1} f_1(w)\mathfrak{W}\,dw = 0 \end{aligned}\right.$$

---

*) Man vergleiche die nachstehende Arbeit des Verfassers „Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variabeln, welche die Form bestimmter Integrale haben".

über (Gl. (38.) der Abh.). Es möge, indem man den reellen Theil der Constanten α, β, γ, $\delta-\varkappa+1$ als positiv annimmt, der Fall betrachtet werden, dass die Grenzen g und h gleich 1 und ∞ sind. Für $f_1(w)$, ... $f_4(w)$ substituirt man die Werthe (11.), für $\mathfrak{W}$ das Product $(w-1)^{\delta-\varkappa}W$. Wegen der Benutzung der Integralgrenze $g=1$ ist nach § 2 für W der Ausdruck (22.) zu setzen, in welchem V ein particuläres Integral der Differentialgleichung (24.) bedeutet. Der Variable x gebe man den speciellen Werth $x=0$. Hierdurch ergiebt sich aus (25.) die Beziehung:

$$(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)\int_1^\infty f_4(w)w^{-\delta-4}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}V\,dv$$

$$-(\delta+1)(\delta+2)\int_1^\infty f_3(w)w^{-\delta-3}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}V\,dv$$

$$+(\delta+1)\int_1^\infty f_2(w)w^{-\delta-2}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}V\,dv$$

$$-\int_1^\infty f_1(w)w^{-\delta-1}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}V\,dv = 0.$$

Die Ausdrücke (11.) der Functionen $f_1(w)$, ... $f_4(w)$ ordne man nach Potenzen von w; dann kommt in der letzten Gleichung hinter den Integralzeichen, abgesehen von $(w-1)^{\delta-\varkappa}$ und $(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}$, die Grösse w nur in den Potenzen $w^{-\delta}$, $w^{-\delta-1}$, $w^{-\delta-2}$ vor; in Folge dessen erhält man eine lineare homogene Relation zwischen drei constanten dreifachen Integralen. Wird durch L_ν das Integral

$$(26.)\qquad L_\nu = \int_1^\infty w^{-\delta-\nu}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty(v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}V\,dv$$

bezeichnet, woselbst V ein Ausdruck von der Form (23.) ist, so findet man nach Berücksichtigung von (12.), (14.) und (15.), dass die obige, aus (25.) erhaltene Gleichung die Gestalt

$$\left.\begin{array}{l}(\delta+1)(\varrho+1)(\sigma+1)L_2+\alpha\beta\gamma L_0\\ -[(\alpha+\delta-\varkappa+1)(\beta+\delta-\varkappa+1)(\gamma+\delta-\varkappa+1)+\varkappa\varrho\sigma+(\delta+1)(\varkappa-\delta)(\varrho+\sigma+1)]L_1\end{array}\right\} = 0$$

annimmt. Dieses Resultat lässt sich in formeller Beziehung leicht verallgemeinern. Nennt man m eine beliebige positive ganze Zahl und α_1, β_1, γ_1, δ_1, ϱ_1, σ_1, $\varkappa_1$ die Constanten

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha+m-1,\quad \beta_1=\beta+m-1,\quad \gamma_1=\gamma+m-1,\quad \delta_1=\delta+m-1,\\ \qquad \varkappa_1=\varkappa+m-1,\quad \varrho_1=\varrho+m-1,\quad \sigma_1=\sigma+m-1,\end{cases}$$

so besteht zwischen letzteren die zu (15.) analoge Gleichung:

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1 = 2\varkappa_1+\varrho_1+\sigma_1-1.$$

Die Grössen α_1, β_1, γ_1 sind positiv, da α, β, γ es sein sollen; $\delta_1-\varkappa_1$ ist gleich $\delta-\varkappa$. Mithin befriedigen die Constanten $\alpha_1, \ldots \sigma_1$ ein System von Bedingungen von derselben Art, wie soeben für die Constanten $\alpha, \ldots \sigma$ vorausgesetzt wurde. Ferner bleibt die Differentialgleichung (24.), welcher V genügt, ungeändert, wenn die Werthe $\alpha_1, \ldots \sigma_1$ an Stelle von $\alpha, \ldots \sigma$ treten; denn es ist

$$\alpha' = \alpha-\varkappa+1 = \alpha_1-\varkappa_1+1, \quad \beta' = \beta-\varkappa+1 = \beta_1-\varkappa_1+1, \quad \text{etc.}$$

Hieraus folgt, dass man, während die Function V ihre frühere Bedeutung behält, in der obigen linearen Relation die sieben Constanten $\alpha, \ldots \sigma$ durch $\alpha_1, \ldots \sigma_1$ ersetzen darf, wodurch L_0, L_1, L_2 in L_{m-1}, L_m, L_{m+1} übergehen. Für die letzteren drei constanten Integrale besteht demnach die Formel:

$$(27.)\quad \left\{\begin{array}{c} (\delta+m)(\varrho+m)(\sigma+m)L_{m+1} \\ -\left[\begin{array}{l}(\alpha+\delta-\varkappa+m)(\beta+\delta-\varkappa+m)(\gamma+\delta-\varkappa+m) \\ +(\varkappa+m-1)(\varrho+m-1)(\sigma+m-1)+(\delta+m)(\varkappa-\delta)(\varrho+\sigma+2m-1)\end{array}\right]L_m \\ +(\alpha+m-1)(\beta+m-1)(\gamma+m-1)L_{m-1} \end{array}\right\} = 0.$$

Führt man in (26.) statt w eine neue Integrationsvariable $\mathfrak{w}$ mittelst der Gleichung $w = \frac{1}{1-\mathfrak{w}}$ ein, so ergiebt sich für L_ν der Ausdruck

$$(28.)\quad L_\nu = \int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\varkappa}(1-\mathfrak{w})^{\gamma+\nu-1}d\mathfrak{w}\int_0^\infty [v(1-\mathfrak{w})-1]^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}\,V dv,$$

in welchem V wiederum irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung (24.) bezeichnet.

§ 4.

Um die zwei mehrdeutigen Hauptintegrale der Differentialgleichung (16.) für die Umgebung des Punktes $x=0$ zu erhalten, hat man in dem bestimmten Integral (13.) die Grenzen g und h gleich 0 und x zu nehmen. Die Anwendung der Grenze 0 erfordert nach § 2, dass in (13.) für die Grösse W eine von den Doppelintegralen (19.) linear abhängige Function substituirt werde. Es zeigt sich, dass die Benutzung der Ausdrücke (19.) selbst zu den genannten zwei Hauptlösungen führt, indem letztere durch die dreifachen bestimmten Integrale

$$(29.)\quad \begin{cases} \int_0^x dw \int_0^w dv \int_0^v \Psi(u, v, w, x)\, du, \\ \int_0^x dw \int_0^w dv \int_1^\infty \Psi(u, v, w, x)\, du \end{cases}$$

dargestellt werden, wo $\Psi(u, v, w, x)$ die Function

$$(30.)\begin{cases} \Psi(u, v, w, x) = \\ (w-x)^{-\delta}(w-1)^{\delta-\varkappa}(v-w)^{\varkappa-\gamma-1} v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}(u-v)^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1} u^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(u-1)^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1} \end{cases}$$

bedeutet. Die Integration nach u ist zuerst, die nach w zuletzt auszuführen. Das erste der Integrale (29.) werde durch die Substitution

$$u = \mathfrak{u}v = \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x, \quad v = \mathfrak{v}w = \mathfrak{v}\mathfrak{w}x, \quad w = \mathfrak{w}x,$$

das zweite durch die Substitution

$$u = \frac{1}{\mathfrak{u}}, \quad v = \mathfrak{v}w = \mathfrak{v}\mathfrak{w}x, \quad w = \mathfrak{w}x$$

umgeformt. Dann erhält man, abgesehen von einer als Factor auftretenden Potenz von -1, die Ausdrücke

$$x^{1-\varrho}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\varrho}(1-\mathfrak{w})^{-\delta}(1-\mathfrak{w}x)^{\delta-\varkappa} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{v})^{\varkappa-\gamma-1} d\mathfrak{v}$$
$$\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x)^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1} d\mathfrak{u}$$

und

$$x^{1-\sigma}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\sigma}(1-\mathfrak{w})^{-\delta}(1-\mathfrak{w}x)^{\delta-\varkappa} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\varkappa-\gamma-1} d\mathfrak{v}$$
$$\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x)^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1} d\mathfrak{u},$$

die in einander übergehen, wenn man einerseits ϱ und σ, andererseits α und β vertauscht. Entwickelt man in denselben die von x abhängigen Factoren der zu integrirenden Functionen nach dem binomischen Satze, so sind die constanten Integrale, welche als Coefficienten der Potenzen von x auftreten, ausschliesslich *Euler*sche Integrale erster Art.

Die in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eindeutigen Lösungen der Gleichung (16.) ergeben sich aus dem Integral (13.), wenn die Grenzen g und h desselben die Werthe 1 und ∞ annehmen. Wegen des Vorkommens der Grenze 1 hat man für W die Function (22.) einzusetzen; hierdurch entsteht das particuläre Integral:

$$(31.)\quad \int_1^\infty (w-x)^{-\delta}(w-1)^{\delta-\varkappa}dw\int_0^\infty (v-w)^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}\,V dv,$$

in welchem V eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (24.) bezeichnet. Durch die Substitution $w=\frac{1}{1-\mathfrak{w}}$ erhält man aus (31.) den Ausdruck:

$$\int_0^1[1-(1-\mathfrak{w})x]^{-\delta}\mathfrak{w}^{\delta-\varkappa}(1-\mathfrak{w})^{\gamma-1}d\mathfrak{w}\int_0^\infty[v(1-\mathfrak{w})-1]^{\varkappa-\gamma-1}v^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}\,V dv.$$

Derselbe liefert, wenn die Potenz $[1-(1-\mathfrak{w})x]^{-\delta}$ nach dem binomischen Satze entwickelt wird, die Reihe

$$(32.)\quad L_0+\frac{\delta}{1}L_1x+\frac{\delta(\delta+1)}{1.2}L_2x^2+\cdots+\frac{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+m-1)}{1.2\ldots m}L_mx^m+\cdots,$$

wo L_0, L_1, ... L_m, ... die in (28.) angegebenen constanten Integrale sind. Man kann nun mit Hülfe der Formel (27.) leicht den Zusammenhang dieser Reihe mit der entsprechenden Lösung von (16.), welche durch directe Reihenintegration gewonnen wird, nachweisen. Setzt man nämlich in die Differentialgleichung (16.) für y eine Reihe von der Form

$$(33.)\quad y = C_0+\frac{\delta}{1}C_1x+\frac{\delta(\delta+1)}{1.2}C_2x^2+\cdots+\frac{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+m-1)}{1.2\ldots m}C_mx^m+\cdots$$

ein, in welcher C_0, C_1, C_2, ... Constante bedeuten, so bleiben C_0 und C_1 willkürlich, und es sind je drei Coefficienten C_{m-1}, C_m, C_{m+1} durch dieselbe lineare Relation verbunden, welche nach (27.) zwischen L_{m-1}, L_m, L_{m+1} besteht. Die Reihe (33.) geht daher in die mit dem bestimmten Integral (31.) identische Reihe (32.) über, falls für C_0 und C_1 die Werthe $C_0=L_0$, $C_1=L_1$ gewählt werden.

In (31.) mögen für V nach einander die zwei Hauptintegrale der Differentialgleichung (24.) in der Umgebung des Punktes $v=0$

$$\begin{cases}\int_1^\infty (u-v)^{\sigma'-\beta'-1}u^{\beta'-\varrho'}(u-1)^{\varrho'-\alpha'-1}du,\\ \int_0^v (u-v)^{\sigma'-\beta'-1}u^{\beta'-\varrho'}(u-1)^{\varrho'-\alpha'-1}du\end{cases}$$

substituirt werden. Dann erhält man, als particuläre Lösungen von (16.), die Ausdrücke

$$(34.)\quad\begin{cases}\int_1^\infty dw\int_0^\infty dv\int_1^\infty \Psi(u,v,w,x)du,\\ \int_1^\infty dw\int_0^\infty dv\int_0^v \Psi(u,v,w,x)du,\end{cases}$$

welche durch die respectiven Gleichungen

$$u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}, \quad w = \frac{1}{1-\mathfrak{w}},$$

$$u = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}, \quad w = \frac{1}{1-\mathfrak{w}}$$

(nach Fortlassung einer Potenz von -1) die Form

$$\int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\varkappa}(1-\mathfrak{w})^{\gamma-1}[1-(1-\mathfrak{w})x]^{-\delta}d\mathfrak{w}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\beta-\varkappa}(1-\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{\varkappa-\gamma-1}d\mathfrak{v}$$
$$\times\int_0^1 \mathfrak{u}^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1}(1-\mathfrak{u})^{\alpha+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}d\mathfrak{u},$$

$$\int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\varkappa}(1-\mathfrak{w})^{\gamma-1}[1-(1-\mathfrak{w})x]^{-\delta}d\mathfrak{w}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{v})^{\beta-\varkappa}(1-\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{\varkappa-\gamma-1}d\mathfrak{v}$$
$$\times\int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\alpha+\delta-\varkappa-\sigma}d\mathfrak{u}$$

annehmen.

Im Gebiete des Punktes $x = 1$ ergeben sich die eindeutigen Lösungen der Gleichung (16.), wenn man in (13.) die Grenzen g und h gleich 0 und ∞ nimmt, die mehrdeutigen dagegen für $g = 1$, $h = x$. In Bezug auf die Function W sind die in § 2 erwähnten Beschränkungen zu beachten. Man setzt im Fall $g = 0$, $h = \infty$ für W nach einander die zwei Integrale (19.), im Fall $g = 1$, $h = x$ zwei Integrale von der Form (22.) ein; und zwar möge die in (22.) vorkommende Function V gleich je einem Hauptintegral der Gleichung (24.) im Gebiet der grossen Werthe von v gewählt werden. Dann gelangt man zu den folgenden vier particulären Integralen von (16.)

$$(35.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty dw \int_0^w dv \int_0^v \Psi(u, v, w, x)du, \\ \int_0^\infty dw \int_0^w dv \int_1^\infty \Psi(u, v, w, x)du, \\ \int_1^x dw \int_0^\infty dv \int_\infty^v \Psi(u, v, w, x)du, \\ \int_1^x dw \int_0^x dv \int_0^1 \Psi(u, v, w, x)du, \end{cases}$$

in denen Ψ wieder die Function (30.) bedeutet. Wendet man auf dieselben die respectiven Substitutionen

$$u = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}-1}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}-1}, \quad w = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}-1},$$

$$u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}-1}, \quad w = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}-1},$$

$$u = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}, \quad w-1 = (x-1)\mathfrak{w},$$

$$u = 1-\mathfrak{u}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}. \quad w-1 = (x-1)\mathfrak{w}$$

an, so kommt, nachdem bei dem dritten und vierten Integral die Potenz $(x-1)^{1-\varkappa}$ vor die Integralzeichen getreten ist, die Grösse x bei den vier Integralen nur in je einem Factor der zu integrirenden Function vor, der für $x = 1$ selbst gleich 1 wird. Durch Entwickelung dieses Factors gewinnt man aus jedem der vier Integrale eine nach Potenzen von $x-1$ aufsteigende Reihe, in welcher, wie in (32.), die Coefficienten constante dreifache Integrale enthalten; auch sind, wie bei jener Reihe, je drei auf einander folgende Coefficienten durch eine homogene lineare Relation verbunden. Die Bedingung, dass die betrachteten Integrale einen bestimmten Sinn haben, wird bei jedem einzelnen Abschnitt dieser Abhandlung als erfüllt angenommen.

§ 5.

Die Hauptintegrale der Differentialgleichung (16.) im Gebiete der grossen Werthe von x werden aus dem bestimmten Integral (13.) erhalten, indem man die Grössen g und h gleich ∞ und x, resp. gleich 0 und 1 wählt. Wird $g = \infty$, $h = x$ gesetzt, so ist nach § 2 (unter der Voraussetzung $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta+3 < 0$) der Ausdruck (13.) ein particuläres Integral von (16.), sobald W überhaupt der Gleichung (4.) genügt. Man nehme, während g und h die genannten Werthe haben, die Grösse W nach einander gleich den drei Hauptintegralen der Differentialgleichung (4.) im Gebiet der grossen Werthe von w (s. (23.) und (25.) der Abh.). Dann ergeben sich die folgenden drei Hauptintegrale von (16.) im Gebiet von $x = \infty$:

$$(36.) \quad \begin{cases} \int_\infty^x dw \int_\infty^w dv \int_x^v \Psi(u, v, w, x)\, du, \\ \int_\infty^x dw \int_x^w dv \int_0^1 \Psi(u, v, w, x)\, du, \\ \int_x^x dw \int_0^1 dv \int_1^v \Psi(u, v, w, x)\, du. \end{cases}$$

Statt u, v, w werden, nachdem man die Function (30.) für Ψ substituirt hat, neue Integrationsvariable $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ mittelst der respectiven Gleichungen

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{x}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, & v &= \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, & w &= \frac{x}{\mathfrak{w}}, \\
u &= \mathfrak{u}, & v &= \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, & w &= \frac{x}{\mathfrak{w}}, \\
u &= 1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}, & v &= 1-\mathfrak{v}, & w &= \frac{x}{\mathfrak{w}}
\end{aligned}
$$

eingeführt. Hierdurch verwandeln sich (abgesehen von Potenzen von -1, die als Factoren vorkommen) die Integrale (36.) in die Ausdrücke

$$
x^{-\alpha}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\alpha-1}(1-\mathfrak{w})^{-\delta}\left(1-\frac{\mathfrak{w}}{x}\right)^{\delta-\varkappa} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\alpha-\varkappa}(1-\mathfrak{v})^{\varkappa-\gamma-1} d\mathfrak{v}
$$
$$
\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}\left(1-\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1} d\mathfrak{u},
$$

$$
x^{-\beta}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\beta-1}(1-\mathfrak{w})^{-\delta}\left(1-\frac{\mathfrak{w}}{x}\right)^{\delta-\varkappa} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta-\varkappa}(1-\mathfrak{v})^{\varkappa-\gamma-1} d\mathfrak{v}
$$
$$
\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1}\left(1-\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1} d\mathfrak{u},
$$

$$
x^{-\gamma}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\gamma-1}(1-\mathfrak{w})^{-\delta}\left(1-\frac{\mathfrak{w}}{x}\right)^{\delta-\varkappa} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\delta}(1-\mathfrak{v})^{\gamma+\delta-\varkappa-\sigma}\left[1-\frac{(1-\mathfrak{v})\mathfrak{w}}{x}\right]^{\varkappa-\gamma-1} d\mathfrak{v}
$$
$$
\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1}(1-\mathfrak{u})^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho} d\mathfrak{u},
$$

von denen die zwei ersten in einander übergehen, wenn man α und β, ϱ und σ vertauscht. Die zu integrirenden Functionen der obigen dreifachen Integrale enthalten je zwei Factoren, die von x abhängen. Entwickelt man letztere nach dem binomischen Satze, so kommen bei den zwei ersten Integralen keine anderen transcendenten Constanten vor als *Euler*sche Integrale erster Art. Auf solche Integrale lassen sich auch die Coefficienten der Entwickelung des dritten Integrals reduciren; denn die daselbst auftretenden constanten Doppelintegrale von der Form

$$
\int_0^1 \mathfrak{v}^{k_1+k_2-1}(1-\mathfrak{v})^{l_1-1} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{k_2-1}(1-\mathfrak{u})^{k_1-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{l_2} d\mathfrak{u}
$$

sind (nach § 3 der Abh.) gleich dem Product zweier *Euler*schen Integrale.

Das vierte zu $x = \infty$ gehörige Hauptintegral der Gleichung (16.) ergiebt sich aus dem bestimmten Integral (13.), wenn die Grenzen g und h gleich 0 und 1 genommen werden. Diese Werthe der Grenzen führen nach

§ 2 zu einer doppelten Beschränkung der Function W. Einerseits muss, weil eine Grenze des Integrals (13.) gleich 0 ist, die Grösse W sich linear aus den zwei Doppelintegralen (19.) zusammensetzen; andererseits darf wegen des Vorkommens der Grenze 1 nur eine in der Umgebung des Punktes $w = 1$ eindeutige Lösung von (4.) für W genommen werden. Die gleichzeitige Benutzung der Grenzen 0 und 1 in (13.) ist daher nur in dem Falle möglich, dass eine lineare homogene Function der Grössen (19.) angegeben werden kann, welche in der Umgebung des Punktes $w = 1$ eindeutig ist. Eine solche Function von w ist aber das Integral

$$(37.)\qquad \int_0^w dv \int_0^\infty \Phi(u, v, w)\, du,$$

in welchem $\Phi(u, v, w)$ die Function (20.) bedeutet. Man erkennt leicht, dass dasselbe sich linear durch die Integrale (19.) ausdrücken lässt. Denn nennt man

$$V_1 = \int_0^v (u-v)^{\sigma'-\beta'-1} u^{\beta'-\varrho'} (u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} du,$$

$$V_2 = \int_1^\infty (u-v)^{\sigma'-\beta'-1} u^{\beta'-\varrho'} (u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} du,$$

$$V_3 = \int_0^\infty (u-v)^{\sigma'-\beta'-1} u^{\beta'-\varrho'} (u-1)^{\varrho'-\alpha'-1} du,$$

so werden die Integrale (19.) durch

$$\int_0^w (v-w)^{-\gamma'} v^{\gamma'-\sigma'} V_1 dv, \quad \int_0^w (v-w)^{-\gamma'} v^{\gamma'-\sigma'} V_2 dv$$

dargestellt, während das Integral (37.) gleich

$$\int_0^w (v-w)^{-\gamma'} v^{\gamma'-\sigma'} V_3 dv$$

ist. Zwischen V_1, V_2, V_3, als particulären Lösungen von (24.), besteht aber eine Relation $V_3 = c_1 V_1 + c_2 V_2$.

Dem Beweise, dass das Doppelintegral (37.) eine bei $w = 1$ eindeutige Function von w ist, soll eine Bemerkung in Bezug auf die Differentialgleichung (4.) vorausgeschickt werden. Substituirt man in (4.)

$$W = w^{1-\sigma'} W_1,$$

so genügt die Function W_1 der analog zu (4.) gebildeten Differentialgleichung

$$(38.)\quad \left\{\begin{array}{l} w^2(w-1)\dfrac{d^3W_1}{dw^3}+w[(\alpha''+\beta''+\gamma''+3)w-(\varrho''+\sigma''+1)]\dfrac{d^2W_1}{dw^2} \\ +[(\beta''\gamma''+\gamma''\alpha''+\alpha''\beta''+\alpha''+\beta''+\gamma''+1)w-\varrho''\sigma'']\dfrac{dW_1}{dw}+\alpha''\beta''\gamma''W_1 \end{array}\right\} = 0,$$

in welcher α'', β'', γ'', ϱ'', σ'' die Constanten

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha'' = \alpha'-\sigma'+1 = \alpha+\delta-\varkappa-\sigma+1,\quad \beta'' = \beta'-\sigma'+1 = \beta+\delta-\varkappa-\sigma+1, \\ \gamma'' = \gamma'-\sigma'+1 = \gamma+\delta-\varkappa-\sigma+1,\quad \varrho'' = \varrho'-\sigma'+1 = \varrho-\sigma+1, \\ \qquad\qquad \sigma'' = 2-\sigma' = \delta-\sigma+1 \end{array}\right.$$

bedeuten. Diese Differentialgleichung besitzt (nach § 4 der Abh., wobei die Symmetrie der Gleichung in Bezug auf α'', β'', γ'' und auf ϱ'', σ'' zu beachten ist) ein particuläres Integral

$$\int_0^\infty (v-w)^{-\beta''}v^{\beta''-\varrho''}dv\int_1^\infty (u-v)^{\varrho''-\alpha''-1}u^{\alpha''-\sigma''}(u-1)^{\sigma''-\gamma''-1}du,$$

welches bei $w=1$ eindeutig ist und durch die Substitution

$$v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1},\quad u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}}$$

in das Integral

$$(39.)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{\varrho''-1}\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta''-\varrho''}(1-\mathfrak{v})^{\alpha''-1}[1+(w-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\beta''}d\mathfrak{v} \\ \qquad\qquad \times\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{u}^{\sigma''-\gamma''-1}(1-\mathfrak{u})^{\gamma''-\varrho''}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\varrho''-\alpha''-1}d\mathfrak{u} \\ = (-1)^{\varrho'-\sigma'}\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta'-\varrho'}(1-\mathfrak{v})^{\alpha'-\sigma'}[1+(w-1)(1-\mathfrak{v})]^{\sigma'-\beta'-1}d\mathfrak{v} \\ \qquad\qquad \times\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{u}^{-\gamma'}(1-\mathfrak{u})^{\gamma'-\varrho'}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\varrho'-\alpha'-1}d\mathfrak{u} \end{array}\right.$$

übergeht. — Es werde nun auf das Integral (37.) die Substitution

$$u = \frac{\mathfrak{u}v}{(\mathfrak{u}-1)w} = \frac{\mathfrak{u}(1-\mathfrak{v})}{\mathfrak{u}-1},\quad v = w(1-\mathfrak{v})$$

angewendet. Dann verwandelt sich dasselbe (abgesehen von einer Potenz von -1) in das Product aus der Potenz $w^{1-\sigma'}$ und dem in (39.) angegebenen Doppelintegral, wobei nur die Variablen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ vertauscht erscheinen. Da aber die Potenz $w^{1-\sigma'}$ sich nur in dem Punkte $w=0$ verzweigt, so folgt, dass das Integral (37.) bei $w=1$ eindeutig bleibt.

Man kann die Eigenschaft des Ausdrucks (37.), eine bei $w=1$ eindeutige Function von w darzustellen, auch in directer Weise ableiten, indem

man zeigt, dass, wenn die Variable w eine geschlossene Curve um den Punkt 1 durchläuft, der genannte Ausdruck ungeändert bleibt, weil das als Summandus hinzutretende Integral den Werth 0 hat.

Nachdem hiermit bewiesen worden ist, dass in dem bestimmten Integral (13.) die Werthe $g = 0$, $h = 1$ für die Grenzen zulässig sind, wenn daselbst für W die Function (37.) eingeführt wird, findet man als das vierte Hauptintegral der Gleichung (16.) im Gebiete der grossen Werthe von x den Ausdruck:

$$(40.)\qquad \int_0^1 dw \int_0^w dv \int_0^x \Psi(u, v, w, x)\, du.$$

Derselbe geht, nachdem für Ψ die Function (30.) eingesetzt worden ist, durch Anwendung der Substitution

$$u = \frac{(1-\mathfrak{v})\mathfrak{u}}{\mathfrak{u}-1}, \quad v = (1-\mathfrak{v})(1-\mathfrak{w}), \quad w = 1-\mathfrak{w}$$

in das Product aus

$$(-1)^{\alpha-\delta-\gamma-\varkappa-\sigma} x^{-\delta}$$

und dem dreifachen Integral

$$\int_0^1 \mathfrak{w}^{\delta-\varkappa}(1-\mathfrak{w})^{\delta-\sigma}\left(1-\frac{1-\mathfrak{w}}{x}\right)^{-\delta} d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\varkappa-\gamma-1}(1-\mathfrak{v})^{\gamma+\delta-\varkappa-\varrho}\, d\mathfrak{v}$$
$$\times \int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta+\delta-\varkappa-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\alpha+\delta-\varkappa-\sigma}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\varkappa+\varrho-\alpha-\delta-1}[1-\mathfrak{w}(1-\mathfrak{u})]^{\varkappa+\sigma-\beta-\delta-1} d\mathfrak{u}$$

über. Das letztere Integral ist eine im Gebiet der grossen Werthe von x eindeutige Function von x.

Die Gleichung (15.), durch welche die sieben Constanten α, β, γ, δ, $\varkappa$, ϱ, σ mit einander verbunden sind, entspricht dem bekannten, von Herrn *Fuchs* bewiesenen Satze, wonach die Summe aller zu endlichen singulären Punkten gehörenden Exponenten sich von der Summe der zu $x = \infty$ gehörenden Exponenten nur um eine ganze Zahl unterscheidet*).

§ 6.

Um die zweite Differentialgleichung vierter Ordnung, welche hier behandelt werden soll, aus (2.) zu erhalten, führt man in (1.) und (3.) statt $\mathfrak{W}$ eine Grösse W mittelst der Relation

*) Cfr. die Abhandlung des Herrn *L. Fuchs* „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" im 66. Bande dieses Journals, pag. 121.

$$(41.)\quad \mathfrak{W} = w^p W$$

ein, wodurch die Differentialgleichung (3.) die Form

$$(42.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^3(w^p f_4(w) W)}{dw^3} - \frac{d^2(w^p f_3(w) W)}{dw^2} \\ + \frac{d(w^p f_2(w) W)}{dw} - w^p f_1(w) W \end{array}\right\} = 0$$

annimmt. Man bestimmt nun die Functionen $f_1, \dots f_4$ und die Constante p durch die Bedingung, dass die Gleichung (42.) in die hypergeometrische Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei endlichen singulären Punkten

$$(43.)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(w)\frac{d^3W}{dw^3} - \{(\lambda-3)_1\varphi'(w)+\psi(w)\}\frac{d^2W}{dw^2} \\ \qquad + \{(\lambda-2)_2\varphi''(w)+(\lambda-2)_1\psi'(w)\}\frac{dW}{dw} \\ \qquad - \{(\lambda-1)_3\varphi'''(w)+(\lambda-1)_2\psi''(w)\}W \end{array}\right\} = 0$$

übergehe, in welcher zur Abkürzung

$$(44.)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(w) = w(w-1)(w-k), \\ \psi(w) = b_1(w-1)(w-k)+b_2 w(w-k)+b_3 w(w-1) \end{array}\right.$$

gesetzt ist, während λ, k, b_1, b_2, b_3 Constante und $(\lambda-1)_\nu$ etc. Binomialcoefficienten bedeuten. Die Gleichung (43.) wird durch bestimmte Integrale

$$(45.)\quad W = \int_{g_1}^{h_1}(v-w)^{\lambda-1}v^{b_1-1}(v-1)^{b_2-1}(v-k)^{b_3-1}dv$$

befriedigt, deren Grenzen g_1, h_1, gleich zweien der fünf Grössen 0, 1, k, ∞, w sind *). Integrirt man die Gleichung (43.) durch Potenzreihen, so findet man in der Umgebung der singulären Punkte $w=0$, $w=1$, $w=k$ nur je eine mehrdeutige particuläre Lösung mit den respectiven Anfangsexponenten $b_1+\lambda-1$, $b_2+\lambda-1$, $b_3+\lambda-1$, ausserdem je zwei eindeutige Lösungen (mit dem Anfangsexponenten 0 oder 1). Der Ausdruck (45.) liefert die mehrdeutigen Integrale, wenn die Grenzen g_1, h_1 gleich dem betreffenden singulären Punkte und der Variable w, dagegen eindeutige, wenn sie gleich zweien der übrigen oben genannten Werthe genommen werden. Im Gebiet der grossen Werthe von w existiren neben einem particulären Integral von (43.), welches den Anfangsexponenten $b_1+b_2+b_3+\lambda-3$ hat und aus

*) Man vergleiche die erwähnte Abhandlung des Verfassers im 71. Bande dieses Journals und berücksichtige die Berichtigung auf Seite 142—143 des 73. Bandes dieses Journals.

(45.) für $g_1 = \infty$, $h_1 = w$ erhalten wird, zwei weitere Integrale, die wie die Potenz $w^{\lambda-1}$ mehrdeutig sind. Lösungen der letzteren Art entstehen aus (45.), wenn g_1, h_1 gleich zweien der Constanten 0, 1, k gewählt werden.

Aus der Forderung, dass die Gleichung (42.) mit der Gleichung (43.) identisch werde, folgt für p der Werth

$$(46.)\qquad p = 1-b_1-\lambda.$$

Denn wenn man in (43.)

$$W = w^{-p}\mathfrak{W}$$

substituirt, so entsteht für $\mathfrak{W}$ eine Differentialgleichung mit ganzen rationalen Coefficienten, in welcher der Factor von $\frac{d^3\mathfrak{W}}{dw^3}$ im Allgemeinen gleich $w^3(w-1)(w-k)$ und nur im Fall $p = 1-b_1-\lambda$ gleich einer Function vierten Grades von w, nämlich gleich $w^2(w-1)(w-k)$ ist. Die Function $f_4(w)$, welche in (3.) den Coefficienten von $\frac{d^3\mathfrak{W}}{dw^3}$ bildet, bedeutet aber eine ganze Function vierten oder niedrigeren Grades.

Man multiplicirt (analog zu § 1) die Gleichung (43.) durch w^{p+1} und setzt hierauf die Coefficienten der Grösse W und ihrer Ableitungen den entsprechenden in (42.) gleich. Auf diese Weise gelangt man zu den Bestimmungen

$$w^p f_4(w) = w^{p+1}\varphi(w),$$

$$w^p f_3(w) - 3\frac{d(w^p f_4(w))}{dw} = w^{p+1}\{(\lambda-3)_1\varphi'(w)+\psi(w)\},$$

$$w^p f_2(w) - 2\frac{d(w^p f_3(w))}{dw} + 3\frac{d^2(w^p f_4(w))}{dw^2}$$
$$= w^{p+1}\{(\lambda-2)_2\varphi''(w)+(\lambda-2)_1\psi'(w)\},$$

$$w^p f_1(w) - \frac{d(w^p f_2(w))}{dw} + \frac{d^2(w^p f_3(w))}{dw^2} - \frac{d^3(w^p f_4(w))}{dw^3}$$
$$= w^{p+1}\{(\lambda-1)_3\varphi'''(w)+(\lambda-1)_2\psi''(w)\},$$

welche (nach Beachtung von (46.)) für die Functionen $f_1, \dots f_4$ die Ausdrücke

$$(47.)\quad \begin{cases} f_4(w) = w\varphi(w) = w^2(w-1)(w-k), \\ f_3(w) = [\lambda\varphi'(w)+\psi(w)]w+3(p+1)\varphi(w), \\ f_2(w) = [(\lambda)_2\varphi''(w)+(\lambda)_1\psi'(w)]w+2(p+1)[\lambda\varphi'(w)+\psi(w)] \\ \qquad\qquad +3(p+1)p(w-1)(w-k), \\ f_1(w) = [(\lambda)_3\varphi'''(w)+(\lambda)_2\psi''(w)]w+(p+1)[(\lambda)_2\varphi''(w)+(\lambda)_1\psi'(w)] \\ \qquad\qquad +(p+1)p[(b_2+\lambda)(w-k)+(b_3+\lambda)(w-1)]. \end{cases}$$

ergeben.

Die Werthe (47.) sind, nachdem das Argument w durch x ersetzt ist, in die Differentialgleichung (2.) zu substituiren. Die letztere lautet, wenn man statt δ eine andere Constante α mittelst der Gleichung

$$(48.)\qquad \delta = -\alpha$$

einführt,

$$(49.)\qquad \left\{\begin{aligned} & f_4(x)\frac{d^4y}{dx^4} - [(\alpha-3)_1 f_4'(x)+f_3(x)]\frac{d^3y}{dx^3} \\ & +[(\alpha-2)_2 f_4''(x)+(\alpha-2)_1 f_3'(x)+f_2(x)]\frac{d^2y}{dx^2} \\ & -[(\alpha-1)_3 f_4'''(x)+(\alpha-1)_2 f_3''(x)+(\alpha-1)_1 f_2'(x)+f_1(x)]\frac{dy}{dx} \\ & +[(\alpha)_4 f_4^{IV}(x)+(\alpha)_3 f_3'''(x)+(\alpha)_2 f_2''(x)+(\alpha)_1 f_1'(x)]y \end{aligned}\right\} = 0.$$

Man definirt ferner vier Constanten β, ϱ, σ, τ durch die Gleichungen

$$(50.)\qquad \begin{cases} \beta = \alpha-b_1+1, & \varrho = \alpha-b_1-\lambda+1, \\ \sigma = b_2-b_1+2\alpha, & \tau = b_3-b_1+2\alpha, \end{cases}$$

so dass

$$b_1 = \alpha-\beta+1,\quad b_2 = \sigma-\alpha-\beta+1,\quad b_3 = \tau-\alpha-\beta+1,$$
$$\lambda = \beta-\varrho,\quad p = \varrho-\alpha$$

wird, und bezeichnet abgekürzt durch γ die Constante

$$(51.)\qquad \gamma = \sigma+\tau-\alpha-2\beta+1.$$

Von den Werthen

$$\varrho,\quad \sigma-\varrho,\quad \tau-\varrho,\quad \alpha-\beta,\quad \alpha-\gamma,\quad \beta-\gamma$$

soll keiner gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sein.

Durch (47.), (50.), (51.) verwandelt sich die Differentialgleichung (49.) in die folgende

$$(52.)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)(x-k)\frac{d^4y}{dx^4} \\ & +\{(A_1+6)x^3+[(\varrho+\sigma-4)k+\varrho+\tau-4]x^2+2k(1-\varrho)x\}\frac{d^3y}{dx^3} \\ & +\left\{\begin{aligned} & (A_2+3A_1+7)x^2+k\varrho(\varrho-1) \\ & +[(\beta+\varrho-2)\{(2-\sigma)k+2-\tau\}+(\beta-1)(\beta-2)(k+1)]x \end{aligned}\right\}\frac{d^2y}{dx^2} \\ & +\{(A_3+A_2+A_1+1)x+(\beta-1)\varrho[(\sigma-\beta)k+\tau-\beta]\}\frac{dy}{dx}+A_4y = 0, \end{aligned}\right.$$

woselbst A_1, A_2, A_3, A_4 die Identität

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-[\beta-1])(x-\gamma) = x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$$

befriedigen, also die Constanten

$$(53.)\quad \begin{cases} A_1 = -\{\alpha+2\beta-1+\gamma\}, \\ A_2 = \alpha\beta+\alpha(\beta-1)+\alpha\gamma+\beta(\beta-1)+\beta\gamma+(\beta-1)\gamma, \\ A_3 = -\{\alpha\beta(\beta-1)+\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta-1)\gamma+\beta(\beta-1)\gamma\}, \\ A_4 = \alpha\beta(\beta-1)\gamma \end{cases}$$

bedeuten.

Das in (1.) definirte Integral y lautet hier nach Berücksichtigung von (41.) und (48.)

$$(54.)\quad y = \int_g^h (w-x)^\alpha w^{\varrho-\alpha} W dw,$$

und die Gleichung (45.) für die Grösse W nimmt durch Einführung der Constanten (50.) die Form

$$(55.)\quad W = \int_{g_1}^{h_1} (v-w)^{\beta-\varrho-1} v^{\alpha-\beta} (v-1)^{\sigma-\alpha-\beta} (v-k)^{\tau-\alpha-\beta} dv$$

an. Aus (54.) wird durch Substitution des Ausdruckes (55.), wenn man zur Abkürzung

$$(56.)\quad \Omega(v,w,x) = (w-x)^\alpha w^{\varrho-\alpha} (v-w)^{\beta-\varrho-1} v^{\alpha-\beta} (v-1)^{\sigma-\alpha-\beta} (v-k)^{\tau-\alpha-\beta}$$

setzt, die Gleichung

$$(57.)\quad y = \int_g^h dw \int_{g_1}^{h_1} \Omega(v,w,x) dv$$

erhalten.

§ 7.

Das bestimmte Integral (54.), in welchem W eine particuläre Lösung von (43.) bezeichnet, genügt der Differentialgleichung (52.), wenn die in (18.), § 2, erwähnte Grösse M sowohl für $w = g$ als für $w = h$ verschwindet. Nach Substitution der Functionen (47.), sowie des Werthes $-\alpha$ statt δ ergiebt sich für M der Ausdruck

$$(58.)\quad M = \begin{cases} -(\alpha-1)(\alpha-2)(w-x)^{\alpha-3} w\varphi(w)\mathfrak{W} \\ -(\alpha-1)(w-x)^{\alpha-2}[(\lambda-1)w\varphi'(w)+w\psi(w)+(3p+2)\varphi(w)]\mathfrak{W} \\ -(w-x)^{\alpha-1}\left\{\chi(w)\mathfrak{W}-[(\lambda-2)w\varphi'(w)+w\psi(w)+(3p+1)\varphi(w)]\frac{d\mathfrak{W}}{dw}\right\} \\ +(\alpha-1)(w-x)^{\alpha-2} w\varphi(w)\frac{d\mathfrak{W}}{dw} - (w-x)^{\alpha-1} w\varphi(w)\frac{d^2\mathfrak{W}}{dw^2}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(59.)\quad \begin{cases} \chi(w) = f_2(w) - f_3'(w) + f_4''(w) \\ \qquad = [(\lambda-1)_2\varphi''(w) + (\lambda-1)_1\psi'(w)]w - (3p+1)\varphi'(w) \\ \qquad + (2p+1)[\lambda\varphi'(w) + \psi(w)] + 3p(p+1)(w-1)(w-k) \end{cases}$$

gesetzt ist.

Wenn α, β, γ den Ungleichheiten

$$\alpha > 3, \quad \beta < 0, \quad \gamma < 0$$

genügen, welche, falls diese Constanten complex sind, sich auf den reellen Theil derselben beziehen sollen, so darf in (54.) für g oder h sowohl der Werth x als der Werth ∞ gesetzt werden, während W ein beliebiges particuläres Integral von (43.) ist. Denn einerseits verschwindet M für $w = x$, sobald der reelle Theil von α die Zahl 3 übersteigt. Andererseits sind, da bei Integration der Gleichung (43.) durch eine Reihe

$$W = K_0 w^q + K_1 w^{q-1} + K_2 w^{q-2} + \cdots$$

der Anfangsexponent q die Werthe $\lambda-1$, $\lambda-2$, $b_1+b_2+b_3+\lambda-3$ annimmt, die Anfangsexponenten der correspondirenden Reihen für $\mathfrak{W}$ nach (41.) gleich $p+\lambda-1$, $p+\lambda-2$, $p+b_1+b_2+b_3+\lambda-3$, d. h. gleich $\beta-\alpha-1$, $\beta-\alpha-2$, $\gamma-\alpha-1$. Wird nach Substitution dieser Reihen auch die Function M nach fallenden Potenzen von w entwickelt, so haben die respectiven Anfangsexponenten die Werthe β, $\beta-1$, γ. Also verschwindet M für $w = \infty$, wenn die reellen Bestandtheile von β und γ negativ sind.

Für g oder h sind ausserdem die Werthe 0, 1, k zulässig; indessen treten dann Beschränkungen für die Function W ein. Man entwickele den Ausdruck M zunächst nach steigenden Potenzen von w. Da für W in der Umgebung des Punktes $w = 0$ Reihen von der Form

$$\begin{cases} W = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \cdots, \\ W = w^{b_1+\lambda-1}(C_0 + C_1 w + C_2 w^2 + \cdots) = w^{\alpha-\varrho}(C_0 + C_1 w + C_2 w^2 + \cdots) \end{cases}$$

existiren, so hat man nach (41.) für $\mathfrak{W}$ die Reihen:

$$\begin{cases} \mathfrak{W} = w^{\varrho-\alpha}(c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots), \\ \mathfrak{W} = C_0 + C_1 w + C_2 w^2 + \cdots. \end{cases}$$

Wird in (58.) die erstere Reihe für $\mathfrak{W}$ substituirt, so findet man, dass M für $w = 0$ verschwindet, falls der reelle Theil der Constante $\varrho-\alpha+1$ po-

sitiv ist. Dagegen nimmt M, wenn man für $\mathfrak{W}$ die letztere Reihe einsetzt, für $w=0$ den von Null verschiedenen Werth

$$(-1)^{\alpha} k(\alpha-\varrho)(\alpha-\varrho-1) C_0 x^{\alpha-1}$$

an. Mithin darf man in dem Integral (54.) eine Grenze g oder h nur dann gleich 0 nehmen, wenn gleichzeitig für W ein in der Umgebung des Punktes $w=0$ eindeutiges particuläres Integral von (43.) (mit dem Anfangsexponenten 0 oder 1) eingeführt wird, und $\varrho > \alpha-1$ ist. Nun stellt der Ausdruck (55.) der Grösse W eine solche bei $w=0$ eindeutige Function von w dar, falls die Grenzen g_1 und h_1 aus den Constanten 1, k, ∞ gewählt werden. Daher hat man in dem Doppelintegral (57.), sobald g oder h gleich 0 ist, für g_1 und h_1 zwei der Werthe 1, k, ∞ einzusetzen.

In der Umgebung des Punktes $w=1$ bestehen für $\mathfrak{W}$ Reihenentwickelungen von der Form

$$\begin{cases} \mathfrak{W} = c_0'+c_1'(w-1)+c_2'(w-1)^2+\cdots, \\ \mathfrak{W} = (w-1)^{\sigma-\alpha-\varrho}[C_0'+C_1'(w-1)+C_2'(w-1)^2+\cdots], \end{cases}$$

und in der Umgebung des Punktes $w=k$ die folgenden

$$\begin{cases} \mathfrak{W} = c_0''+c_1''(w-k)+c_2''(w-k)^2+\cdots, \\ \mathfrak{W} = (w-k)^{\tau-\alpha-\varrho}[C_0''+C_1''(w-k)+C_2''(w-k)^2+\cdots]. \end{cases}$$

Denn die Anfangsexponenten der Function $\mathfrak{W}$ stimmen, wie aus (41.) folgt, in diesen Gebieten mit den Anfangsexponenten der entsprechenden Ausdrücke von W überein, und bei Integration der Gleichung (43.) durch eine nach Potenzen von $w-1$, bezw. $w-k$ aufsteigende Reihe erhält man für den Exponenten der Anfangspotenz die Werthe 0, 1, $b_2+\lambda-1$, bezw. 0, 1, $b_3+\lambda-1$. Die Constanten $b_2+\lambda-1$, $b_3+\lambda-1$ sind aber nach (50.) gleich $\sigma-\alpha-\varrho$, $\tau-\alpha-\varrho$. Setzt man in (58.) für $\mathfrak{W}$ die zuerst erwähnte, bei $w=1$ eindeutige Reihe ein, so ergiebt sich

$$(60.)\begin{cases} [M]_{w=1} = \\ c_0'(\alpha-1)(\sigma-\alpha-\varrho)(k-1)(1-x)^{\alpha-2}-[c_0'\chi(1)+c_1'(\sigma-\alpha-\varrho-1)(k-1)](1-x)^{\alpha-1}, \end{cases}$$

wo $\chi(1)$ den Werth der Function (59.) für $w=1$ bezeichnet. Ebenso nimmt, wenn in (58.) für $\mathfrak{W}$ die obige, nur die positiven ganzen Potenzen von $w-k$ enthaltende Reihe substituirt wird, der Ausdruck M einen von 0 verschiedenen Werth, der analog zu (60.) gebildet ist, an. Durch Anwendung der Werthe 1 oder k für g oder h, während gleichzeitig für W eine der

genannten bei $w = 1$, bezw. $w = k$, eindeutigen Lösungen von (43.) genommen wird, erhält man demnach aus dem bestimmten Integral (54.) keine particuläre Lösung von (52.), sondern nur Lösungen von gewissen nicht homogenen Differentialgleichungen. Setzt man andererseits für $\mathfrak{W}$ die oben genannte Reihe ein, welche gleich dem Product aus $(w-1)^{\sigma-\alpha-\varrho}$ und einer bei $w = 1$ eindeutigen Function ist, so verschwindet M für $w = 1$, sobald der reelle Bestandtheil von $\sigma-\alpha-\varrho$ positiv ist. Desgleichen ist $M = 0$ für $w = k$, falls für W die mit der Potenz $(w-k)^{\tau-\alpha-\varrho}$ beginnende Reihe gewählt wird, und der reelle Bestandtheil von $\tau-\alpha-\varrho$ positiv ist. Den letztgenannten Reihenentwickelungen von $\mathfrak{W}$ entsprechen die mehrdeutigen Hauptintegrale der Differentialgleichung (43.) im Bezirk $w = 1$, bezw. $w = k$, welche aus dem bestimmten Integrale (55.) für $g_1 = 1$, $h_1 = w$ und für $g_1 = k$, $h_1 = w$ erhalten werden. Also darf man, um zu Lösungen von (52.) zu gelangen, in dem Doppelintegral (57.) für g oder h den Werth 1 anwenden, wenn g_1 und h_1 gleich 1 und w genommen werden, und den Werth k, wenn g_1 und h_1 gleich k und w sind.

§ 8.

Die Integration der Gleichung (52.) durch Potenzreihen zeigt unmittelbar, dass in der Umgebung des Punktes $x = 0$ zwei eindeutige Lösungen mit den Anfangsexponenten 0 oder 1 existiren, ausserdem zwei Lösungen, welche gleich dem Product aus $x^{\varrho+1}$ und einer bei $x = 0$ eindeutigen Function sind. In dem Bereich des Punktes $x = 1$, resp. des Punktes $x = k$, besitzt die Gleichung (52.) je drei eindeutige Integrale mit den Anfangsexponenten 0, 1, 2, ferner ein viertes Integral, welches durch Division mit der Potenz $(x-1)^{\sigma-\varrho+1}$, resp. $(x-k)^{\tau-\varrho+1}$, eindeutig wird. Im Gebiete der grossen Werthe von x sind die Anfangsexponenten der Entwickelung (nach fallenden Potenzen von x) bei zwei particulären Integralen gleich β, resp. $\beta-1$, bei einem gleich α und bei einem gleich γ.

Die in den §§ 6 und 7 enthaltenen Rechnungen führen zu einer Darstellung dieser verschiedenen particulären Lösungen der Gleichung (52.) durch bestimmte Doppelintegrale. In den Gebieten der endlichen singulären Punkte $x = 0$, $x = 1$, $x = k$ erhält man die erwähnten mehrdeutigen Lösungen, wenn man in (57.) die Grenzen g und h gleich dem betreffenden singulären Punkt und der Grösse x setzt, dagegen eindeutige Lösungen, wenn man für g und h zwei der übrigen singulären Werthe (einschliesslich

des Werthes ∞) wählt. Die Grenzen g_1, h_1 werden in jedem dieser Fälle durch die im § 7 abgeleiteten Bedingungen bestimmt.

Nimmt man in dem Doppelintegral (57.) die Grenzen g und h gleich 0 und x, so sind nach § 7, wegen des Vorkommens des Werthes $g = 0$, die Grenzen g_1, h_1 gleich zweien der Werthe 1, k, ∞ zu setzen. Man erhält auf diese Weise die particulären Integrale

$$(61.)\qquad \int_0^x dw \int_1^\infty \Omega(v, w, x)\,dv, \quad \int_0^x dw \int_k^\infty \Omega(v, w, x)\,dv,$$

in denen Ω die Function (56.) bedeutet. Wird das erste derselben durch die Substitution

$$v = \frac{1}{\mathfrak{v}}, \quad w = x\mathfrak{w},$$

das zweite durch die Substitution

$$v = \frac{k}{\mathfrak{v}}, \quad w = x\mathfrak{w}$$

umgeformt, so gehen dieselben nach Berücksichtigung von (51.), abgesehen von constanten Factoren, in die Ausdrücke

$$x^{\varrho+1}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\varrho-\alpha}(1-\mathfrak{w})^\alpha d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\varrho-\gamma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma-\alpha-\beta}(1-k\mathfrak{v})^{\tau-\alpha-\beta}(1-\mathfrak{v}\mathfrak{w}x)^{\beta-\varrho-1} d\mathfrak{v}.$$

$$x^{\varrho+1}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\varrho-\alpha}(1-\mathfrak{w})^\alpha d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\varrho-\gamma}(1-\mathfrak{v})^{\tau-\alpha-\beta}\left(1-\frac{\mathfrak{v}}{k}\right)^{\sigma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}x}{k}\right)^{\beta-\varrho-1} d\mathfrak{v}$$

über. Indem man ferner $g = 1$, $h = \infty$ und $g = k$, $h = \infty$ wählt und (nach § 7) beachtet, dass in (57.), falls $g = 1$ ist, die Werthe $g_1 = 1$, $h_1 = w$, und falls $g = k$ ist, die Werthe $g_1 = k$, $h_1 = w$ zu nehmen sind, ergeben sich die folgenden zwei, bei $x = 0$ eindeutigen particulären Lösungen von (52.):

$$(62.)\qquad \int_1^x dw \int_1^w \Omega(v, w, x)\,dv, \quad \int_k^x dw \int_k^w \Omega(v, w, x)\,dv.$$

In der Umgebung des Punktes $x = 1$ hat man zunächst das mehrdeutige Hauptintegral

$$(63.)\qquad \int_1^x dw \int_1^w \Omega(v, w, x)\,dv,$$

welches durch die Substitution

$$v-1 = (w-1)\mathfrak{v} = (x-1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}, \quad w-1 = (x-1)\mathfrak{w}$$

die Form

$$\text{Const.}\ (x-1)^{\sigma-\varrho+1}\int_0^1 \mathfrak{w}^{\sigma-\alpha-\varrho}(1-\mathfrak{w})^{\alpha}[1+(x-1)\mathfrak{w}]^{\varrho-\alpha}d\mathfrak{w}$$

$$\times\int_0^1 \mathfrak{v}^{\sigma-\alpha-\beta}(1-\mathfrak{v})^{\beta-\varrho-1}[1+(x-1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}]^{\alpha-\beta}\left[1-\frac{x-1}{k-1}\mathfrak{v}\mathfrak{w}\right]^{\tau-\alpha-\beta}d\mathfrak{v}$$

annimmt, sodann die drei in diesem Gebiet eindeutigen Integrale

$$(64.)\qquad \int_0^{\infty} dw\int_1^{\infty}\Omega dv,\quad \int_0^{\infty} dw\int_k^{\infty}\Omega dv,\quad \int_k^{x} dw\int_k^{w}\Omega dv.$$

Analog verwandelt sich das zum Gebiet des Punktes k gehörige Hauptintegral

$$(65.)\qquad \int_k^x dw\int_k^w \Omega(v,w,x)dv$$

durch die Substitution

$$v-k=(w-k)\mathfrak{v}=(x-k)\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad w-k=(x-k)\mathfrak{w}$$

in das Product aus $(x-k)^{\tau-\varrho+1}$ und einer bei $x=k$ eindeutigen Function, während die Integrale

$$(66.)\qquad \int_0^{\infty} dw\int_1^{\infty}\Omega dv,\quad \int_0^{\infty} dw\int_k^{\infty}\Omega dv,\quad \int_1^{x} dw\int_1^{w}\Omega dv$$

in der Umgebung des Punktes $x=k$ eindeutig und stetig sind. Die zwei ersten Ausdrücke (64.) sind mit den zwei ersten Ausdrücken (66.) identisch; dieselben stellen Functionen dar, die in der Umgebung jedes endlichen Punktes eindeutig und stetig sind, mit Ausnahme des Punktes $x=0$. Ferner sind das dritte Integral (64.) und das dritte Integral (66.) mit den Integralen (62.) gleichlautend, so dass das erstgenannte nur bei $x=k$, das letztere nur bei $x=1$ eindeutig zu sein aufhört.

Im Gebiet der grossen Werthe von x lassen sich unmittelbar drei particuläre Lösungen von (52.) angeben, welche man als Producte aus je einer Potenz von x und einer in diesem Gebiete eindeutigen Function schreiben kann. Es sind dies die Integrale:

$$(67.)\qquad \int_{\infty}^{x} dw\int_{\infty}^{w}\Omega dv,\quad \int_{\infty}^{x} dw\int_0^{1}\Omega dv,\quad \int_{\infty}^{x} dw\int_0^{k}\Omega dv.$$

Dieselben liefern, wenn neue Variablen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch die respectiven Gleichungen

$$v = \frac{w}{\mathfrak{v}} = \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, \quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}},$$

$$v = \mathfrak{v}, \quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}},$$

$$v = k\mathfrak{v}, \quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}}$$

eingeführt werden, die Ausdrücke

$$x^\gamma \int_0^1 \mathfrak{w}^{-\gamma-1}(1-\mathfrak{w})^\alpha d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\varrho-\gamma}(1-\mathfrak{v})^{\beta-\varrho-1}\left(1-\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\sigma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{k\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\tau-\alpha-\beta} d\mathfrak{v},$$

$$\text{Const. } x^\beta \int_0^1 \mathfrak{w}^{-\beta-1}(1-\mathfrak{w})^\alpha d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\alpha-\beta}(1-\mathfrak{v})^{\sigma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{\mathfrak{v}}{k}\right)^{\tau-\alpha-\beta}\left(1-\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\beta-\varrho-1} d\mathfrak{v},$$

$$\text{Const. } x^\beta \int_0^1 \mathfrak{w}^{-\beta-1}(1-\mathfrak{w})^\alpha d\mathfrak{w} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\alpha-\beta}(1-\mathfrak{v})^{\tau-\alpha-\beta}(1-k\mathfrak{v})^{\sigma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{k\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{x}\right)^{\beta-\varrho-1} d\mathfrak{v},$$

woselbst γ die Constante (51.) bedeutet.

Ausserdem hat eine Differenz zweier bestimmten Integrale von der Form (57.) die Eigenschaft, der Differentialgleichung (52.) zu genügen und für grosse Werthe von x in das Product aus der Potenz x^α und einer eindeutigen Function von x überzugehen. Diese Lösung der Gleichung (52.) wird nach einem bekannten Verfahren als die Differenz zweier particulären Integrale einer linearen, aber nicht homogenen Differentialgleichung gewonnen. Nennt man

$$(68.) \quad \begin{cases} \eta = \int_0^1 dw \int_k^1 \Omega(v, w, x) dv, \\ \zeta = \int_k^1 dw \int_k^w \Omega(v, w, x) dv, \end{cases}$$

wo $\Omega(v, w, x)$ die Function (56.) bedeutet, so stellt der Ausdruck $\eta - \zeta$ ein particuläres Integral von (52.) dar, weil, wie gezeigt werden soll, η und ζ einer und derselben nicht-homogenen Differentialgleichung genügen, deren linke Seite mit derjenigen der Gleichung (52.) übereinstimmt.

Man bezeichnet zur Abkürzung durch $\omega(v, w)$ die Function

$$(69.) \quad \omega(v, w) = (v-w)^{\beta-\varrho-1} v^{\alpha-\beta}(v-1)^{\sigma-\alpha-\beta}(v-k)^{\tau-\alpha-\beta}$$

und durch W_1, W_2 die Integrale:

$$(70.) \quad W_1 = \int_k^1 \omega(v, w) dv, \quad W_2 = \int_k^w \omega(v, w) dv.$$

Dann ist nach (56.):

$$(71.)\quad \begin{cases} \eta = \int_0^1 (w-x)^\alpha w^{\varrho-\alpha} W_1 dw, \\ \zeta = \int_k^1 (w-x)^\alpha w^{\varrho-\alpha} W_2 dw. \end{cases}$$

Die Grösse W_1 ist ein particuläres Integral der Differentialgleichung (43.), welches in der Umgebung des Punktes $w = 0$ eindeutig und stetig bleibt; W_2 ist das mehrdeutige Hauptintegral von (43.) im Gebiet des Punktes $w = k$. Die reellen Bestandtheile der Constanten $\varrho-\alpha+1$ und $\tau-\alpha-\varrho$ mögen positiv sein. Dann verschwindet nach § 7 die in (58.) angegebene Grösse M für $w = 0$, falls $W = W_1$ genommen wird; ebenso ist $M = 0$ für $w = k$, wenn man die Function W_2 für W einsetzt. Die Ausdrücke (71.) sind daher Fälle des Integrals (54.), für welche zwar $[M]_{w=g}$ den Werth Null, aber $[M]_{w=h}$ einen von Null verschiedenen Werth hat; die Grenze h ist sowohl bei η als bei ζ gleich 1. Hieraus ergiebt sich, dass jede der Functionen η, ζ eine nicht-homogene Differentialgleichung befriedigt, deren linke Seite die der Gleichung (52.) ist, und deren rechte Seite (cfr. § 5 der Abh., wobei die dort bewirkte Division der Gleichung durch δ zu berücksichtigen ist) die Form $-\alpha[M]_{w=1}$ hat. Jedoch ist in M der Werth $W = W_1$ zu substituiren, falls es sich um die Differentialgleichung der Grösse η handelt, dagegen $W = W_2$, falls die Differentialgleichung der Grösse ζ hergestellt werden soll. Man kann nun leicht nachweisen, dass der Ausdruck $[M]_{w=1}$ bei der Substitution $W = W_1$ derselbe ist wie bei der Substitution $W = W_2$, woraus dann folgt, dass η und ζ particuläre Integrale einer und derselben Differentialgleichung sind. Es ist zu bemerken, dass die Constanten $\beta-\varrho-1$ und $\sigma-\alpha-\varrho-1$ hier ebenfalls als positiv in ihren reellen Theilen vorausgesetzt werden.

Für $w = 1$ stimmen die Functionen W_1 und W_2 überein, da

$$[W_1]_{w=1} = [W_2]_{w=1} = \int_k^1 \omega(v, 1) dv$$

ist. Aus den Gleichungen

$$\frac{dW_1}{dw} = \int_k^1 \frac{\partial \omega(v, w)}{\partial w} dv, \quad \frac{dW_2}{dw} = \int_k^w \frac{\partial \omega(v, w)}{\partial w} dv + [\omega(v, w)]_{v=w}$$

folgt ferner

$$\left[\frac{dW_1}{dw}\right]_{w=1} = \left[\frac{dW_2}{dw}\right]_{w=1} = \int_k^1 \left[\frac{\partial \omega(v, w)}{\partial w}\right]_{w=1} dv;$$

denn $\omega(v, w)$ verschwindet (wegen $\beta-\varrho-1 > 0$) für $v = w$. Werden in

Analogie zu (41.) zwei Grössen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{W}_1 = w^p W_1 = w^{\varrho-\alpha} W_1, \quad \mathfrak{W}_2 = w^p W_2 = w^{\varrho-\alpha} W_2$$

definirt, so ist auch

$$[\mathfrak{W}_1]_{w=1} = [\mathfrak{W}_2]_{w=1}, \quad \left[\frac{d\mathfrak{W}_1}{dw}\right]_{w=1} = \left[\frac{d\mathfrak{W}_2}{dw}\right]_{w=1}.$$

In der Umgebung des Punktes $w = 1$ hat die allgemeine Function $\mathfrak{W}$ die Form (s. § 7)

$$\mathfrak{W} = c'_0+c'_1(w-1)+c'_2(w-1)^2+\cdots+(w-1)^{\sigma-\alpha-\varrho}[C'_0+C'_1(w-1)+C'_2(w-1)^2+\cdots],$$

woraus

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dw} = c'_1+2c'_2(w-1)+\cdots+(\sigma-\alpha-\varrho)C'_0(w-1)^{\sigma-\alpha-\varrho-1}+\cdots$$

folgt. Da $\sigma-\alpha-\varrho-1 > 0$ sein soll, so hat man

$$[\mathfrak{W}]_{w=1} = c'_0, \quad \left[\frac{d\mathfrak{W}}{dw}\right]_{w=1} = c'_1.$$

Nach § 7 trägt der Bestandtheil

$$(w-1)^{\sigma-\alpha-\varrho}[C'_0+C'_1(w-1)+C'_2(w-1)^2+\cdots]$$

der Function $\mathfrak{W}$ zu dem Werthe $[M]_{w=1}$ nichts bei, wenn, wie hier angenommen wird, $\sigma-\alpha-\varrho$ positiv ist. Mithin ist $[M]_{w=1}$ gleich dem in (60.) angegebenen Ausdruck

$$c'_0(\alpha-1)(\sigma-\alpha-\varrho)(k-1)(1-x)^{\alpha-2}-[c'_0\chi(1)+c'_1(\sigma-\alpha-\varrho-1)(k-1)](1-x)^{\alpha-1}.$$

Da nun die Constanten c'_0 und c'_1 in den Fällen $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_2$ die nämlichen Werthe haben, so ist auch $[M]_{w=1}$ im Falle $W = W_1$ dieselbe Function von x wie im Falle $W = W_2$. Folglich genügt $\eta-\zeta$ der Differentialgleichung (52.).

Jedes der beiden Integrale η, ζ, die man auf die Form

$$\eta = (-1)^\alpha x^\alpha \int_0^1 \left(1-\frac{w}{x}\right)^\alpha w^{\varrho-\alpha} dw \int_k^1 \omega(v, w) dv,$$

$$\zeta = (-1)^\alpha x^\alpha \int_k^1 \left(1-\frac{w}{x}\right)^\alpha w^{\varrho-\alpha} dw \int_k^w \omega(v, w) dv$$

bringen kann, ist gleich dem Product aus der Potenz x^α und einer für grosse Werthe von x eindeutigen und stetigen Function von x. Demnach stellt der Ausdruck

$$(72.) \quad \int_0^1 dw \int_k^1 \Omega(v, w, x) dv - \int_k^1 dw \int_k^w \Omega(v, w, x) dv$$

ein wie die Potenz x^a mehrdeutiges Hauptintegral der Differentialgleichung (52.) im Gebiet der grossen Werthe von x dar.

Es möge erwähnt sein, dass man dem particulären Integral (72.) eine einfachere Gestalt geben kann, wenn man einen complexen Integrationsweg für die Variable w anwendet. Lässt man w vom Nullpunkte aus eine geschlossene (sich nicht schneidende) Curve durchlaufen, in deren Innern die Punkte 1 und k liegen, so ist, abgesehen von einem constanten Factor, das Doppelintegral

$$\int dw \int_1^k \Omega(v, w, x)\,dv$$

mit dem Ausdruck (72.) identisch. Nach § 7 darf in (54.), wenn man beide Grenzen g, h gleich 0 nimmt, für W die Function W_1 eingesetzt werden. Indem man nun (nach § 1 der nachstehenden Arbeit) das Verhalten der Grösse W_1 im Fall eines Umlaufs der Variablen w um den Punkt k, resp. um die Punkte 1 und k, feststellt, zerlegt man ohne Schwierigkeit das soeben erwähnte Doppelintegral in die in (72.) angegebenen zwei Summanden, zu denen noch der constante Factor $e^{2\pi i(\beta-\varrho)}-1$ hinzutritt.

§ 9.

Es soll schliesslich ein Fall der Differentialgleichung (2.) betrachtet werden, in welchem die Function $f_1(x)$ den Werth Null hat. Durch die Substitution (1.) erhält man, wenn $f_1(x) = 0$ ist, und wenn gleichzeitig der Buchstabe γ statt δ angewendet wird, aus (2.) die Gleichung

$$\begin{array}{c} [N]_{w=h}-[N]_{w=g} \\ +\int_g^h (w-x)^{-\gamma-2}\left\{\frac{d^2[f_4(w)\mathfrak{W}]}{dw^2}-\frac{d[f_3(w)\mathfrak{W}]}{dw}+f_2(w)\mathfrak{W}\right\}dw \;=\; 0, \end{array}$$

in der N den Ausdruck

$$(73.)\qquad N = \begin{cases} -(\gamma+2)(w-x)^{-\gamma-3}f_4(w)\mathfrak{W} \\ +(w-x)^{-\gamma-2}\left\{f_3(w)\mathfrak{W}-\frac{d[f_4(w)\mathfrak{W}]}{dw}\right\} \end{cases}$$

bedeutet. Genügt also $\mathfrak{W}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(74.)\qquad \frac{d^2[f_4(w)\mathfrak{W}]}{dw^2}-\frac{d[f_3(w)\mathfrak{W}]}{dw}+f_2(w)\mathfrak{W} \;=\; 0,$$

und werden die Grössen g, h so gewählt, dass N für $w = g$ und $w = h$ verschwindet, so ist (im Falle $f_1(x) = 0$) das bestimmte Integral (1.) eine

particuläre Lösung von (2.). Man bezeichne durch σ und τ zwei Constanten und definire die Function W durch die Gleichung

$$(75.)\qquad \mathfrak{W} = w^{\gamma-\sigma}(w-1)^{\gamma-\tau}W,$$

so dass für y der Ausdruck

$$(76.)\qquad y = \int_g^h (w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\sigma}(w-1)^{\gamma-\tau} W dw$$

entsteht. Dann lässt sich für passende Werthe von $f_4(w)$, $f_3(w)$, $f_2(w)$ die für W geltende Differentialgleichung auf die der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe,

$$(77.)\qquad w(w-1)\frac{d^2W}{dw^2}+[(\alpha'+\beta'+1)w-\varrho']\frac{dW}{dw}+\alpha'\beta'W = 0,$$

zurückführen. Verbindet man nämlich α', β', ϱ' mit drei anderen Constanten α, β, ϱ durch die Gleichungen

$$(78.)\qquad \alpha' = \alpha+\gamma-\sigma-\tau+1,\quad \beta' = \beta+\gamma-\sigma-\tau+1,\quad \varrho' = \varrho-\sigma+1$$

und wählt für $f_4(w)$, $f_3(w)$, $f_2(w)$ die Functionen

$$\begin{aligned}
f_4(w) &= w^2(w-1)^2,\\
f_3(w) &= -w(w-1)[(\alpha+\beta-2\gamma-5)w-(\varrho+\sigma-2\gamma-3)],\\
f_2(w) &= (\alpha-\gamma-2)(\beta-\gamma-2)w^2-(\varrho-\gamma-1)(\sigma-\gamma-1)(w-1)\\
&\quad -[(\alpha-\tau-1)(\beta-\tau-1)-(\gamma-\tau+1)(\varrho+\sigma-2\gamma-3)]w,
\end{aligned}$$

so geht, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Gleichung (77.) in Folge der Substitution (75.) in (74.) über. Für die genannten Werthe von f_4, f_3, f_2 (und $f_1 = 0$, $\delta = \gamma$) nimmt die Differentialgleichung (2.) die Gestalt

$$(79.)\qquad \left\{\begin{aligned}
&x^2(x-1)^2\frac{d^4y}{dx^4}+x(x-1)[(\varrho+\sigma+3)(x-1)+(\tau+\omega+3)x]\frac{d^3y}{dx^3}\\
&+[(\varrho+1)(\sigma+1)(x-1)^2+Bx(x-1)+(\tau+1)(\omega+1)x^2]\frac{d^2y}{dx^2}\\
&+(\gamma+1)\left\{\begin{aligned}&[(\alpha+1)(\beta+1)+\varrho\sigma-(\tau-\gamma)(\omega-\gamma)](x-1)\\ &+[(\alpha+1)(\beta+1)+\tau\omega-(\varrho-\gamma)(\sigma-\gamma)]x\end{aligned}\right\}\frac{dy}{dx}\\
&+\alpha\beta\gamma(\gamma+1)y = 0
\end{aligned}\right.$$

an, woselbst B die Constante

$$B = \left\{\begin{aligned}&\alpha\beta+(\alpha+\beta)(2\gamma+1)+\gamma(\gamma+1)\\ &-\varrho\sigma-\tau\omega+2(\varrho+\sigma+\tau+\omega)+5\end{aligned}\right.$$

bedeutet, und ω mit den Constanten α, β, γ, ϱ, σ, τ in der Beziehung

$$(80.)\qquad \alpha+\beta+2\gamma+1 = \varrho+\sigma+\tau+\omega$$

steht *).

Die reellen Bestandtheile der Constanten α, β, $\gamma-\varrho+1$, $\gamma-\sigma+1$, $\gamma-\tau+1$, $\gamma-\omega+1$ werden als positiv, der reelle Theil der Constante $\gamma+3$ als negativ vorausgesetzt. Dann verschwindet N, sobald man w gleich einem der vier Werthe 0, 1, ∞, x wählt und für W irgend ein particuläres Integral von (77.) substituirt. Der Gleichung (77.) genügen bestimmte Integrale von der Form

$$W = \int_{g_1}^{h_1} (v-w)^{-\beta'} v^{\beta'-\varrho'} (v-1)^{\varrho'-\alpha'-1} dv,$$

deren Grenzen g_1, h_1 gleich je zweien der Werthe 0, 1, ∞, w sind. Bezeichnet man also durch $\Phi(v, w, x)$ die Function

$$\Phi(v, w, x) = (w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\sigma} (w-1)^{\gamma-\tau} (v-w)^{\sigma+\tau-\beta-\gamma-1} v^{\beta+\gamma-\varrho-\tau} (v-1)^{\varrho+\tau-\alpha-\gamma-1}$$

so ist der Ausdruck

$$(81.)\qquad y = \int_g^h dw \int_{g_1}^{h_1} \Phi(v, w, x) dv$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (79.), falls für g, h zwei der Werthe 0, 1, ∞, x, und für g_1, h_1 zwei der Werthe 0, 1, ∞, w gesetzt werden.

Die Hauptintegrale in den Bezirken von $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ ergeben sich für die Gleichung (79.) nach denselben Regeln, die im Vorhergehenden für die Gleichungen (16.) und (52.) zur Anwendung kamen. In der Umgebung des Punktes $x = 0$ stellen die zwei Ausdrücke

$$(82.)\qquad \int_0^x dw \int_0^w \Phi(v, w, x) dv, \quad \int_0^x dw \int_1^\infty \Phi(v, w, x) dv$$

die mehrdeutigen Hauptintegrale von (79.) dar, und zwar ist im ersteren die Potenz $x^{1-\varrho}$, im letzteren die Potenz $x^{1-\sigma}$ mit einer bei $x = 0$ eindeutigen und stetigen Function von x multiplicirt. Die analoge Bedeutung haben für die Umgebung des Punktes $x = 1$ die zwei Doppelintegrale

$$(83.)\qquad \int_1^x dw \int_1^w \Phi(v, w, x) dv, \quad \int_1^x dw \int_0^\infty \Phi(v, w, x) dv,$$

*) Die obige Differentialgleichung (79.) ist von Herrn *J. Thomae* in seiner Schrift „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet“ (Halle a. S., 1875, Nebert) behandelt worden. Die Bezeichnung der Constanten ist hier eine etwas andere als in der genannten Schrift. Herr *Thomae* definirt die Function y durch die Art ihrer Unstetigkeit und Verzweigung.

bei denen $(x-1)^{1-\omega}$ und $(x-1)^{1-\tau}$ die Anfangspotenzen der Entwickelung nach steigenden Potenzen von $x-1$ sind. Man transformirt die Integrale (82.) und (83.) durch die respectiven Substitutionen

$$v = \mathfrak{v}\mathfrak{w}x, \qquad w = \mathfrak{w}x; \qquad v = \frac{1}{\mathfrak{v}}, \qquad w = \mathfrak{w}x;$$

$$v-1 = \mathfrak{v}\mathfrak{w}(x-1), \quad w-1 = \mathfrak{w}(x-1); \quad v = \frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}, \quad w-1 = \mathfrak{w}(x-1).$$

Von den Functionen

$$(84.) \qquad \int_1^\infty (w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\sigma}(w-1)^{\gamma-\tau} W dw,$$

$$(85.) \qquad \int_0^\infty (w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\sigma}(w-1)^{\gamma-\tau} W dw$$

ist die erste eindeutig und stetig bei $x=0$, die zweite eindeutig und stetig bei $x=1$, während W ein beliebiges particuläres Integral von (77.) bezeichnet. Da wegen des letzteren Umstandes jeder der Ausdrücke (84.) und (85.) zwei wesentlich verschiedene particuläre Lösungen von (79.) enthält, so gehören zu (79.) die Anfangsexponenten $0,\ 1,\ 1-\varrho,\ 1-\sigma$ in der Umgebung des Punktes $x=0$ und die Anfangsexponenten $0,\ 1,\ 1-\tau,\ 1-\omega$ in der Umgebung des Punktes $x=1$, was man durch Integration mittelst Potenzreihen leicht bestätigt.

Im Bezirk der grossen Werthe von x sind die zwei Integrale

$$(86.) \qquad \int_x^{x} dw \int_\infty^{w} \Phi(v,w,x)dv, \qquad \int_\infty^{x} dw \int_0^{1} \Phi(v,w,x)dv$$

gleich Producten aus der Potenz $x^{-\alpha}$, bezw. $x^{-\beta}$, und je einer eindeutigen stetigen Function von x. Man setzt in beiden Integralen $w=\frac{x}{\mathfrak{w}}$ und im ersteren ausserdem $v = \frac{w}{\mathfrak{v}} = \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}\cdot$ Die Integrale von der Form

$$(87.) \qquad \int_0^1 (w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\sigma}(w-1)^{\gamma-\tau} W dw,$$

wo W irgend eine Lösung von (77.) bedeutet, führen, wenn man sie nach fallenden Potenzen von x entwickelt, zu Reihen, deren Anfangspotenz gleich $x^{-\gamma}$ ist. Im Gebiet von $x=\infty$ sind also $-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma,\ -(\gamma+1)$ die zur Gleichung (79.) gehörigen Anfangsexponenten *). Die Gleichung (80.) ist

---

*) Man bemerke, dass in den Coefficienten der Gleichung (79.) die Factoren der höchsten Potenzen von x auf dieselbe Form, die sie in (16.) haben, gebracht werden können, falls man die Constanten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ durch die Identität

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-[\gamma+1]) = x^4 - A_1x^3 + A_2x^2 - A_3x + A_4$$

definirt.

ein Ausdruck der oben erwähnten Beziehung zwischen den Exponenten aller singulären Punkte. Die Constanten ϱ, σ, $\varrho-\sigma$, τ, ω, $\tau-\omega$, $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$ werden als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Die Differentialgleichung (79.) ist hiermit — wie früher die Gleichungen (16.) und (52.) — durch bestimmte Integrale gelöst worden, die sich von einander nur durch die Werthe der Grenzen unterscheiden, während die zu integrirende Function eine und dieselbe bleibt. Dass die einzelnen particulären Integrale der Gleichungen (16.), (52.) und (79.) die im Vorhergehenden angegebenen Eigenschaften haben, wird durch die allgemeineren Betrachtungen bewiesen, welche den Gegenstand des nachstehenden Aufsatzes „Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen etc.“ bilden.

Kiel, October 1886.

Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Im Folgenden wird eine Gruppe von bestimmten Integralen betrachtet, der sowohl die hypergeometrischen Integrale als auch die particulären Lösungen der in dem vorstehenden Aufsatze behandelten Differentialgleichungen angehören. Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass die zu integrirende Function, welche von einem Parameter x abhängt, letzteren ausschliesslich in einem Factor $(w-x)^\lambda$ enthält, woselbst w die Integrationsvariable und λ eine Constante bedeutet. Durchläuft die Grösse x eine geschlossene Curve, so stimmt im Allgemeinen der schliessliche Werth des bestimmten Integrals nicht mit dem anfänglichen überein. Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich aber, wie gezeigt werden soll, die Aenderung des Werthes eines solchen Integrals in einfacher und directer Weise berechnen.

Bei der Integration mehrdeutiger algebraischer Functionen ist die Anbringung von Querschnitten in der Ebene der complexen Veränderlichen ein wichtiges Hülfsmittel, um die Resultate der Rechnung anschaulich zu machen. Für die hier angestellten Untersuchungen erscheint es jedoch zweckmässiger, auf dieses Hülfsmittel (wenigstens in der Regel) zu verzichten und die Beweglichkeit der Variablen nicht einzuschränken. Auch würde, da der Exponent λ nicht als rational vorausgesetzt wird, die zu integrirende Function sich im Allgemeinen nicht mittelst einer endlichen Anzahl von Blättern eindeutig darstellen lassen.

In den nachstehenden §§ 1 und 2 werden einfache bestimmte Integrale behandelt; im § 1 nimmt man die Grenzen als constant an, während im § 2 die obere Integralgrenze gleich x gesetzt wird. Im § 3 werden die in den beiden ersten Paragraphen abgeleiteten Sätze auf mehrfache bestimmte Integrale von ähnlicher Form ausgedehnt.

§ 1.

Es sei $S(x)$ das bestimmte Integral

$$(1.)\quad S(x) = \int_g^h (w-x)^\lambda f(w)\,dw,$$

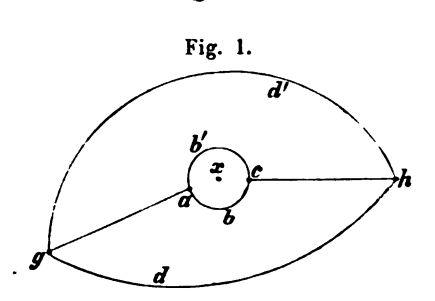
in welchem $f(w)$ eine im Allgemeinen mehrdeutige Function von w allein, und g, h, λ beliebige Constante bedeuten. An der unteren Integralgrenze $w = g$ fixirt man, falls $f(w)$ mehrdeutig ist, einen bestimmten Werth dieser Function, desgleichen einen Werth der Potenz $(w-x)^\lambda$. Ist $w = g$ ein Verzweigungspunkt der Function $f(w)$, so dass sich die verschiedenen Zweige derselben durch die Wahl des Werthes $f(g)$ nicht unterscheiden lassen, so wird unter $S(x)$ das Integral

$$(2.)\quad \int_{g+\varepsilon}^h (w-x)^\lambda f(w)\,dw$$

verstanden, in welchem ε eine überaus kleine Grösse bezeichnet, und an dessen unterer Grenze ein bestimmter Werth $f(g+\varepsilon)$ gewählt wird. Man setzt voraus, dass der Integrationsweg alle Verzweigungspunkte der zu integrirenden Function, sowie alle Punkte, wo sie unendlich oder unbestimmt wird, vermeidet, und dass die successiven Werthe dieser Function sich stetig an einander anschliessen. Ferner wird, falls die Grenzen g, h zu den singulären Punkten der Function $f(w)$ gehören, das Integral (1.) als convergent angenommen, in dem Sinne, dass die den Grenzen benachbarten Theile des Integrationsweges nur einen unendlich kleinen Beitrag zu dem Integral liefern. Man setzt ausserdem voraus, dass, wenn in der w-Ebene in der unmittelbaren Nähe des Punktes g oder h irgend eine unendlich kleine Curve gezogen wird, das über eine solche Curve erstreckte Integral der Function $(w-x)^\lambda f(w)$ einen verschwindend kleinen Werth habe. Dann ist in (1.) eine Aenderung derjenigen Richtung, in welcher der Integrationsweg sich dem Punkte g oder h nähert, ohne Einfluss auf den Werth des Integrals. Nach diesen Festsetzungen hat das Integral (1.) für einen gegebenen Integrationsweg und für einen gegebenen Anfangswerth der zu integrirenden Function einen bestimmten eindeutigen Werth. Betrachtet man zwei verschiedene Integrationswege von der Beschaffenheit, dass das von ihnen eingeschlossene Flächenstück keinen Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt der zu integrirenden Function enthält, und stimmen die Anfangswerthe der letzteren überein, so nimmt das Integral in beiden Fällen den gleichen Werth an, so dass der eine Integrationsweg durch den anderen ersetzt werden darf.

Die Grösse x, welche einen Parameter der zu integrirenden Function darstellt, ist ein Verzweigungspunkt derselben, da die Constante λ nicht ganzzahlig sein soll. Man betrachte irgend einen bestimmten Werth der Grösse x, der jedoch nicht zu den singulären Argumenten der Function $f(w)$ gehören möge, und beschreibe um den Punkt der Ebene, welcher diesen Werth darstellt, einen kleinen Kreis. Es sei abc ein Bogen des Kreises, $ab'c$ der übrige Theil seiner Peripherie. Von a ziehe man eine beliebige (sich nicht schneidende) Linie zum Punkte g, von c eine solche zum Punkte h, und nehme für das Integral (1.) nach einander die zwei Integrationswege, welche in den Strecken ga und ch übereinstimmen, von denen der eine aber ausserdem den Bogen abc, der andere den Bogen $ab'c$ enthält. Der reelle Bestandtheil der Constante $\lambda+1$ werde als positiv vorausgesetzt; dann sind die Integrale längs der Kreisbögen abc und $ab'c$ verschwindend klein, sobald der Radius des Kreises genügend klein gewählt wird. Die Integrale zwischen den Punkten g und a sind identisch, da von gleichen Werthen der zu integrirenden Function ausgegangen wird. Dagegen unterscheiden sich die zwei Integrale zwischen den Grenzen c und h durch den Factor $e^{2\pi i\lambda}$. Denn um die hier in Betracht kommenden Werthe der Potenz $(w-x)^{\lambda}$ im Punkte $w=c$ zu vergleichen, hat man die Variable w längs $cbab'c$ einen Umlauf um den Punkt x machen zu lassen, der, wie in nebenstehender Fig. 1, in negativer Drehungsrichtung erfolgen möge. Auf der Strecke ch gehören also zu dem Integrationsweg $gab'ch$ Werthe der Potenz $(w-x)^{\lambda}$, welche aus den zum Wege $gabch$ gehörigen durch Multiplication mit $e^{-2\pi i\lambda}$ entstehen. Auf diese Weise erhält man, wenn der Radius des Kreises unendlich klein genommen wird, für die Differenz der obigen zwei Integrale, die hier nur durch ihre (in Klammern eingeschlossenen) Integrationswege bezeichnet werden sollen, die Gleichung:

Fig. 1.



$$(3.)\qquad (gabch)-(gab'ch) = (1-e^{-2\pi i\lambda})\int_c^h (w-x)^{\lambda} f(w)\,dw.$$

Auf der rechten Seite, welche bis auf einen verschwindend kleinen Unterschied gleich dem Ausdruck

$$(1-e^{-2\pi i\lambda})\int_x^h (w-x)^{\lambda} f(w)\,dw$$

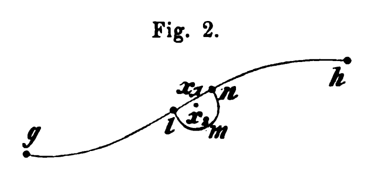
ist, wird unter dem Integral zwischen den Grenzen c und h dasjenige verstanden, welches einen Bestandtheil des Integrals $(gabch)$ bildet. — Sind gdh und $gd'h$ zwei andere Integrationswege, zwischen denen zwar der Punkt x, jedoch keiner der singulären Punkte von $f(w)$ liegt, so ist die Differenz der zugehörigen Integrale (gdh) und $(gd'h)$ gleich der Differenz der Integrale $(gabch)$ und $(gab'ch)$.

Fasst man die Grösse x als veränderlich auf, so ist das Integral (1.) eine mehrdeutige Function von x, die sich im Allgemeinen von einem Punkte zum andern stetig fortsetzen lässt. Jedoch hat die Forderung, dass die Function $S(x)$ mit x zugleich stetig variire, in gewissen Fällen eine Aenderung des Integrationsweges des Integrals (1.) zur Folge. Es seien, nachdem für (1.) irgend ein Integrationsweg gh gewählt worden ist, x_1 und x_2 zwei einander benachbarte Punkte, die zu verschiedenen Seiten dieses Integrationsweges liegen. Durch n werde ein den Punkten x_1 und x_2 benachbarter Punkt des Integrationsweges selbst bezeichnet. Setzt man in $S(x)$ die Grösse x nach einander gleich x_1 und x_2, während man denselben Integrationsweg der Variablen w beibehält, so ergeben sich, gemäss der oben angestellten Rechnung, zwei Werthe $S(x_1)$ und $S(x_2)$, deren Differenz, abgesehen von einem verschwindend kleinen Betrag, gleich der Grösse

$$(1-e^{-2\pi i\lambda})\int_n^h (w-x)^\lambda f(w)\,dw$$

ist. Denn die zuvor betrachteten Integrale $(gabch)$ und $(gab'ch)$ unterschieden sich ebenfalls nur dadurch von einander, dass der Punkt x einmal diesseits, einmal jenseits des Integrationsweges lag, und nach Fig. 2 entspricht

Fig. 2.



$S(x_1)$ dem Integral $(gabch)$, $S(x_2)$ dem Integral $(gab'ch)$. Die genannten Werthe $S(x_1)$ und $S(x_2)$ gehören demnach, da ihre Differenz nicht zugleich mit x_1-x_2 unendlich klein wird, verschiedenen Zweigen der Function $S(x)$ an. Man erkennt, dass unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Integrationsweges zwei auf einander folgende Functionalwerthe eines und desselben Zweiges von $S(x)$ nur dann erhalten werden, wenn die Verbindungslinie der benachbarten Punkte x_1 und x_2 den Integrationsweg nicht schneidet. Es werde nun von einem dicht vor n liegenden Punkte l des Integrationsweges eine kleine Curve lmn von der Beschaffenheit gezogen, dass der Punkt x_2 sich innerhalb der geschlossenen Curve $lmnl$ befindet, und statt

des ursprünglichen Integrationsweges der Weg $glmnh$ für die Variable w gewählt. Hierdurch wird der Werth $S(x_1)$ nicht geändert; aber zu x_2 gehört jetzt nicht mehr die vorhin erhaltene Grösse $S(x_2)$, sondern ein Werth, der sich von $S(x_1)$ unendlich wenig unterscheidet, der also für die stetige Fortsetzung der Function $S(x)$ bei dem Uebergang von x_1 zu x_2 anzuwenden ist. Während demnach für $x = x_1$ der ursprüngliche Integrationsweg benutzt werden kann, muss derselbe für $x = x_2$, wenn $S(x)$ stetig sein soll, durch $glmnh$ ersetzt werden. Der Integrationsweg weicht, sobald die Bahn des Parameters x ihn schneidet, derselben aus. Man kann sich den Integrationsweg wie einen elastischen Faden vorstellen, welcher durch die ihn treffende x-Curve vorwärts geschoben wird.

Die nämlichen Schlüsse wiederholen sich, wenn die Variable x ihren Weg fortsetzt und vom Punkte x_2 zu weiteren Punkten x_3, x_4, ... übergeht. Da es wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Function $S(x)$ nicht zulässig ist, dass x plötzlich von der einen Seite des Integrationsweges zur anderen übertrete, so ändert sich letzterer in dem Masse, als x fortschreitet. Man kann die Strecken gl und nh des gegebenen Integrationsweges (Fig. 2) beibehalten, hat aber dann zwischen l und n eine Curve einzuschalten, durch welche die x-Bahn, von ihrem Schnittpunkt mit dem ursprünglichen Integrationswege an, eingeschlossen wird.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass die Variable x um den Punkt h, welcher die obere Grenze des Integrals (1.) bildet, einen positiven Umlauf ausführe. Man grenzt um den Punkt h ein Flächenstück K ab, auf welchem kein Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt der Function $f(w)$ liegt, abgesehen vom Punkte h selbst, der ein solcher singulärer Punkt sein darf. Auf K werde irgend ein Punkt x_1 gewählt, und von demselben aus eine beliebige, sich nicht schneidende Curve um h gezogen, welche in einem, dem Punkte x_1 unendlich benachbarten Punkte ξ_1 endigt. Der gegebene Integrationsweg des Integrals (1.) möge auf der Fläche K in der Art geändert werden, dass ein Punkt l des Weges sehr nahe bei x_1 liegt, wodurch (nach der Definition von K) der Werth der Function (1.) nicht geändert wird. Diesen Weg glh nimmt man als den für $x = x_1$ anzuwendenden ursprünglichen Integrationsweg und lässt die Variable x von x_1 aus die um den Punkt h gelegte Curve $x_1 e \xi_1$ durchlaufen. Die letztere Curve habe (Fig. 3) in ihrem ersten, zu x_1 benachbarten Theil einen Schnittpunkt mit dem Wege glh. Da der Integrationsweg dem Wege von x ausweicht,

so geht, wenn die Strecke gl beibehalten wird, die w-Curve von l aus zuerst dem Wege von x parallel (indem sie ausserhalb desselben bleibt) und wendet sich dann, ohne ihn zu schneiden, zum Punkte h. Nach Fig. 3 würde, je nachdem x in k_1, k_2, k_3, u. s. w. angelangt ist, ein Integrationsweg gll_1h, gll_1l_2h, $gll_1l_2l_3h$, u. s. w. anzuwenden sein. Ist x in ξ_1 eingetroffen, so nimmt die Grösse w zwischen den Punkten x_1 und ξ_1 ihren Weg zum Punkte h. Es sei l' ein nahe bei ξ_1 liegender Punkt dieses Weges; dann besteht für $x = \xi_1$ die Bahn der Variablen w aus der Strecke gl, der fast geschlossenen Curve $ll_1l_2l_3l'$ und der Strecke $l'h$. Die zwei Werthe $S(x_1)$ und $S(\xi_1)$ des Integrals (1.), welche dem Anfangspunkte und dem Endpunkte der von x durchlaufenen Curve entsprechen, unterscheiden sich in doppelter Weise von einander. Einerseits ist, wie gezeigt wurde, der Integrationsweg ein verschiedener; andererseits hat man in die zu integrirende Function des Integrals (1.) einmal $x = x_1$, einmal $x = \xi_1$ zu substituiren. Wenn x variirt, ändert sich jedes der Elemente des Integrals (1.) wegen des Factors $(w-x)^\lambda$ der zu integrirenden Function; die zur Strecke gl gehörigen Elemente nehmen indessen, abgesehen von einem unendlich kleinen Unterschied, für $x = \xi_1$ dieselben Werthe an, die sie anfänglich für $x = x_1$ hatten, da diese Punkte w ausserhalb der x-Curve liegen. Bei dem Integral längs der Curve $ll_1l_2l_3l'$, welches den zweiten Bestandtheil von $S(\xi_1)$ bildet, kann man, da für letztere Function auf K keine anderen singulären Punkte als die Punkte ξ_1 und h vorkommen, den Integrationsweg vereinfachen. Man lasse w geradlinig von l bis zu einem nahe bei h gelegenen Punkte h' vorrücken (Fig. 4), den Punkt h in einem kleinen Halbkreis umgehen und sodann den Punkt l' auf einer geraden Linie erreichen. Hieran schliesst sich, indem der Punkt ξ_1 in positiver Drehungsrichtung umgangen wird, das Integral von l' bis h. Das in $S(\xi_1)$ enthaltene Integral (glh') ist bis auf eine unendlich kleine Differenz mit dem Integral $S(x_1)$ identisch. Denn da innerhalb eines bestimmten Integrals die Werthe der zu integrirenden Function stetig auf einander folgen, so ergiebt sich aus der Uebereinstimmung der Integrale längs gl auch die Uebereinstimmung

Fig. 3.

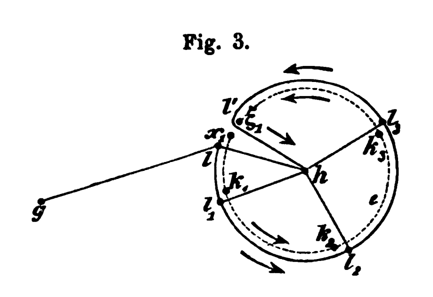
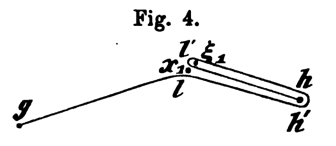


Fig. 4.



stimmung der bis h fortgesetzten Integrale, und nur der Umstand, dass ξ_1 und x_1, sowie h und h' nicht völlig zusammenfallen, verursacht einen unendlich kleinen Unterschied der genannten zwei Ausdrücke. Das Integral längs $h'l'h$, welches den übrigen Theil von $S(\xi_1)$ ausmacht, ist gleich dem Product aus dem Integral $h'l'$ und der Constante $1-e^{2\pi i\lambda}$. Denn abgesehen von den unmittelbar bei h und bei ξ_1 liegenden Strecken der w-Curve, welche nach der Voraussetzung nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe $S(\xi_1)$ liefern, kann man für die zwei Integrale $(h'l')$ und $(l'h)$ einen und denselben Integrationsweg wählen, der dann in beiden Richtungen durchlaufen wird; die Potenz $(w-\xi_1)^\lambda$ nimmt aber, wenn die Veränderliche w den Punkt ξ_1 im positiven Sinne umkreist, den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf. Das Integral $(h'l')$ kann kurz als das Integral $(h\xi_1)$ bezeichnet werden, so dass, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen, die Gleichung

$$(4.)\qquad S(\xi_1) = S(x_1)+(1-e^{2\pi i\lambda})\int_h^{\xi_1}(w-\xi_1)^\lambda f(w)dw$$

erhalten wird. In dem rechts stehenden Integral zwischen h und ξ_1 ist der Werth der zu integrirenden Function an der unteren Grenze $w=h$ nach Figur 4 zu bestimmen, indem die Function sich bei h' stetig an die in $S(x_1)$ vorkommenden Functionalwerthe anschliesst. — Lässt man den Punkt ξ_1 mit x_1 zusammenfallen, so kann man das gewonnene Resultat dahin aussprechen, dass, wenn x vom Punkte x_1 aus einen positiven Umlauf um den Punkt h macht, der ursprüngliche Werth $S(x_1)$ des Integrals (1.) sich um den Summandus

$$(5.)\qquad (1-e^{2\pi i\lambda})\int_h^{x_1}(w-x_1)^\lambda f(w)dw$$

vermehrt. Für die Grenze g gilt der analoge Satz, da man in (1.) unter Aenderung des Vorzeichens die Grenzen g und h vertauschen kann. Die obige Betrachtung zeigt, dass die Grenzen g und h Verzweigungspunkte für die Function $S(x)$ sind, auch wenn sie nicht zu den singulären Punkten der Function $f(w)$ gehören.

In Figur 3 schneidet die x-Curve den Integrationsweg nahe bei dem Punkte x_1. Nimmt man nun an, dass der Punkt x_1 zwar, wie in Fig. 3, dicht bei dem Punkte l, aber auf der anderen Seite des Integrationsweges glh (also unterhalb l) liege, so kann die Variable x die Curve $x_1k_1k_2\xi_1$ durchlaufen, ohne dass der Weg der Integrationsvariablen w geändert zu werden brauchte. Indessen ist die Beziehung zwischen $S(x_1)$ und $S(\xi_1)$

doch dieselbe wie zuvor. Denn wenn man das gegebene, zwischen g und h zu nehmende Integral in das Integral von g bis l und das Integral von l bis h zerlegt, so hat nur das letztere für den Endpunkt der x-Curve einen anderen Werth als für den Ausgangspunkt. Dasselbe nimmt den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf, weil die x-Curve die zugehörigen Punkte w umkreist. Folglich tritt auch in diesem Falle der Ausdruck (5.) als Summandus zu dem ursprünglichen Integral $S(x_1)$ hinzu.

Durchläuft die Variable x vom Punkte $x = x_1$ aus eine geschlossene Curve, welche den ganzen Integrationsweg gh des Integrals (1.) umschliesst, ihn jedoch nicht schneidet, so nimmt das Integral den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf, falls der Umlauf im positiven Sinne geschieht. In der That tritt in der Summe

$$\sum_{(\nu)} (w_\nu - x_1)^\lambda f(w_\nu)(w_{\nu+1} - w_\nu),$$

als deren Grenzfall das bestimmte Integral für $x = x_1$ aufzufassen ist, zu jeder der Potenzen $(w_\nu - x_1)^\lambda$ der Factor $e^{2\pi i\lambda}$ hinzu, weil x den Punkt w_ν umkreist. Im Uebrigen ändert sich die Summe nicht, da die anfängliche Bestimmung der Werthe $f(w_\nu)$ ihre Gültigkeit behält.

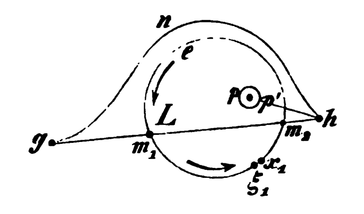
Zieht man ferner, von einem Punkte x_1 aus, eine geschlossene Curve, welche den Integrationsweg von (1.) weder schneidet noch umschliesst, so hat das Integral (1.), wenn x die Curve durchläuft, schliesslich den nämlichen Werth $S(x_1)$, der zum anfänglichen Argument x_1 gehörte. Denn weder der Integrationsweg noch die Werthe $(w_\nu - x_1)^\lambda f(w_\nu)$ erfahren durch den Umlauf eine Aenderung. — Dies führt zu dem Schluss, dass das im Vorhergehenden definirte Integral $S(x)$ in der Umgebung jedes beliebigen Punktes der x-Ebene eine eindeutige stetige Function von x ist, mit Ausnahme der zwei Punkte $x = g$ und $x = h$. Umgiebt man den Integrationsweg gh durch eine geschlossene Linie A_1 und zieht von einem Punkte der Curve A_1 eine Gerade A_2 ins Unendliche, so ist die Function $S(x)$, wenn man einen Anfangswerth derselben wählt und die Variable x keine der Linien A_1, A_2 überschreiten lässt, eine eindeutige stetige Function von x in der ganzen Ebene, abgesehen von dem durch A_1 umschlossenen Flächenstück. Da der Integrationsweg gh durch einen anderen ersetzt werden kann, welcher der alleinigen Bedingung zu genügen hat, dass zwischen ihm und dem ursprünglichen Wege kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function liege, so sind auch die Punkte des gegebenen Integrationsweges, ausser g und h, keine singulären Punkte der Function $S(x)$. Hieraus geht hervor,

dass die singulären Punkte, welche für die Function $S(x)$ überhaupt in Betracht kommen, in zwei Klassen zerfallen. Zunächst ergeben sich, abgesehen von $x = \infty$, nur $x = g$ und $x = h$ als singuläre Argumente der Function $S(x)$, indem die letztere in der Umgebung jedes anderen Punktes eindeutig und stetig bleibt. Auch die übrigen (von g und h verschiedenen) singulären Punkte der zu integrirenden Function des Integrals (1.) sind, wenn x auf die Umgebung eines solchen Punktes beschränkt wird, nicht singulär für $S(x)$. Aber aus der Gleichung (4.) folgt, dass, wenn die Variable x einen Umlauf um g oder h macht, $S(x)$ durch Aufnahme eines Summandus von der in (5.) erwähnten Art in eine Function übergeht, welche im Allgemeinen noch andere singuläre Punkte besitzt.

Zu einem ähnlichen Resultat wie bei dem Umlauf der Variablen x um g oder h gelangt man durch die Annahme, dass die von x_1 ausgehende x-Curve, unter zweimaliger Kreuzung des Integrationsweges, einen jenseits des letzteren liegenden singulären Punkt der Function $f(w)$ umkreist. $S(x)$ vermehrt sich dann ebenfalls, wie gezeigt werden soll, um einen Summandus von der Form des Ausdrucks (5.).

Der Fall, dass die Bahn der Variablen x, ohne einen der Punkte g, h zu umkreisen, den Integrationsweg gh zweimal schneidet, lässt sich auf die Fälle, dass der Weg gh gar nicht, und dass er einmal getroffen wird, zurückführen. Die x-Curve $x_1 e \xi_1$ (Fig. 5), deren Endpunkt ξ_1 als unendlich nahe dem Ausgangspunkte x_1 vorausgesetzt wird, schneide den Integrationsweg gh in den zwei Punkten m_2 und m_1. Von den zwei Theilen, in welche das von der Curve $x_1 e \xi_1$ umschlossene Flächenstück durch die Linie gh getheilt wird, heisse derjenige L, dem die Punkte x_1 und ξ_1 nicht angehören. Liegt auf L kein singulärer Punkt der Function $f(w)$, so ändert sich das Integral (1.) nicht, wenn statt des gegebenen Integrationsweges $g m_1 m_2 h$ ein anderer gnh gewählt wird, der ausserhalb des Flächenstücks L bleibt und auf derselben Seite des gegebenen Integrationsweges liegt wie L. Hierdurch kommt man aber auf den zuvor behandelten Fall zurück, dass die x-Curve den Integrationsweg gh weder schneidet noch umschliesst. Es soll zweitens angenommen werden, dass sich auf L ein singulärer Punkt p der Function $f(w)$ befinde. Man ziehe wiederum von g nach h eine Linie gnh, die mit

Fig. 5.



L auf derselben Seite von gm_1m_2h liegt und L nicht trifft; zwischen gnh und gm_1m_2h soll kein anderer singulärer Punkt als p vorhanden sein. Den Werth, welchen das Integral (1.) bei Benutzung des Integrationsweges gnh erhält, nenne man $\mathfrak{S}(x)$, während das zum gegebenen Integrationsweg gm_1m_2h gehörige Integral, wie oben, durch $S(x)$ bezeichnet wird. An der unteren Grenze g (resp. in der Umgebung derselben) sollen in $\mathfrak{S}(x)$ die nämlichen Werthe der zu integrirenden Function angewendet werden, wie in $S(x)$. Indem man zu $S(x)$ die Grösse $\mathfrak{S}(x)$ gleichzeitig addirt und subtrahirt, hat man die Gleichung

$$S(x) = \mathfrak{S}(x)+(hngm_1m_2h),$$

wo $(hngm_1m_2h)$ das Integral von $(w-x)^\lambda f(w)$ längs der geschlossenen Curve $hngm_1m_2h$ bedeutet. Den Integrationsweg des letzteren Integrals kann man auf die Verbindungslinie der Punkte h und p zusammenziehen, in der Weise, dass, wenn p' ein überaus nahe bei p liegender Punkt ist, die geradlinige Strecke hp', ein kleiner Kreis um p und der Weg $p'h$ zusammen die Bahn von w bilden. Es wird vorausgesetzt, dass auch bei dem Integral zwischen den Grenzen h und p die dem Punkte p unmittelbar benachbarten Theile des Integrationsweges nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Integral liefern, und dass das Integral längs des kleinen Kreises um p einen zu vernachlässigenden Werth hat. Bezeichnet man durch $f_1(w)$ den Werth, welchen die Function $f(w)$ auf der Strecke $p'h$ annimmt, nachdem die Variable w den Umlauf um den Punkt p gemacht hat, so ist das Integral längs $p'h$ gleich dem Ausdruck

$$-\int_h^{p'}(w-x)^\lambda f_1(w)dw,$$

in welchem p' durch p ersetzt werden darf. Demnach ergiebt sich für $S(x)$ die Gleichung:

$$(6.)\qquad S(x) = \mathfrak{S}(x)+\int_h^p(w-x)^\lambda[f(w)-f_1(w)]dw.$$

Durchläuft nun die Variable x die Curve $x_1e\xi_1$, so stimmt bei der Function $\mathfrak{S}(x)$ der Endwerth mit dem Anfangswerth überein, da der Integrationsweg gnh durch die Bahn von x weder geschnitten noch umschlossen wird. Auf das Integral zwischen h und p, das neben $\mathfrak{S}(x)$ auf der rechten Seite von (6.) steht, ist aber die Formel (4.) anwendbar; denn x macht einen einfachen Umlauf um die obere Grenze p. Die Function $S(x)$ nimmt also, wenn

man schliesslich ξ_1 mit x_1 zusammenfallen lässt, in Folge des Variirens von x den Summandus

$$(7.)\qquad (1-e^{2\pi i\lambda})\int_p^{x_1}(w-x_1)^\lambda[f(w)-f_1(w)]dw$$

auf. Befindet sich auf dem Flächenstück L ausser p noch ein zweiter singulärer Punkt q der Function $f(w)$, so ändert sich die obige Rechnung nur in der Beziehung, dass das Integral längs der geschlossenen Curve $hngm_1m_2h$ auf die zwei Linien hp und pq zusammengezogen wird, so dass man, nach Vernachlässigung der Kreisintegrale, die Summe eines Integrals zwischen den Grenzen h, p und eines zwischen den Grenzen p, q erhält. Die Bahnen von x und von w schneiden sich aber auch in diesem Falle nur in einem Punkte, so dass zur Bestimmung des schliesslichen Werthes $S(\xi_1)$ die früher abgeleitete Regel ausreicht, der zufolge der Integrationsweg dem Wege von x auszuweichen hat. Analog verfährt man, wenn eine beliebige Anzahl singulärer Punkte von $f(w)$ auf der Fläche L liegt.

§ 2.

Die Grenzen g und h sind bisher als constant vorausgesetzt worden. Man ersetze nunmehr h durch den Werth x und bezeichne durch $T(x)$ das Integral

$$(8.)\qquad T(x) = \int_g^x (w-x)^\lambda f(w)dw,$$

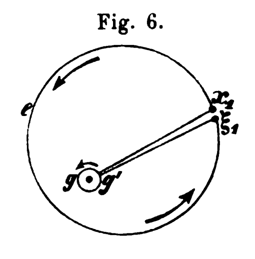
für welches analoge Voraussetzungen wie für $S(x)$ gelten mögen. Aus § 1 folgt, dass die Betrachtung des Integrals $S(x)$ sich von der des Integrals $T(x)$ nicht trennen lässt, da der Ausdruck (5.), den $S(x)$ bei dem Umlauf der Variablen x um h als Summandus aufnimmt, die Form von $T(x)$ hat.

In (8.) ist, wenn x variirt, die x-Curve dem Integrationswege hinzuzufügen, während gleichzeitig die zu integrirende Function sich in den einzelnen Integralelementen ändert. Es sollen hier die zwei Fälle behandelt werden, dass x einen beliebigen singulären Punkt p der Function $f(w)$ umkreist, und dass x die untere Grenze g umkreist. Der anfängliche Werth von x heisse wiederum x_1. Man grenzt um den Punkt p, der von g verschieden sein soll, ein Flächenstück K ab, auf welchem kein anderer singulärer Punkt von $f(w)$ liegt als p, und setzt x_1 als einen Punkt von K voraus. Von x_1 aus werde eine auf K liegende und den Punkt p um-

schliessende Curve $x_1 e \xi_1$ bis zu dem nahe bei x_1 befindlichen Punkte ξ_1 gezogen. Durchläuft x diese Curve, so gehört zu $T(\xi_1)$ der Integrationsweg $g x_1 e \xi_1$. Die Strecke $g x_1$ des letzteren Weges liefert (wenn man schliesslich den Punkt ξ_1 auf x_1 fallen lässt) ein mit dem ursprünglichen Werthe $T(x_1)$ identisches Integral; denn die Punkte w dieser Strecke liegen ausserhalb der x-Curve, so dass für dieselben $(w-\xi_1)^\lambda$ gleich $(w-x_1)^\lambda$ ist. Das Integral (8.) nimmt somit, wenn x die genannte Curve durchläuft, einen Summandus auf. Der Integrationsweg des Integrals $(x_1 e \xi_1)$, das man zu $T(x_1)$ hinzuzufügen hat, um $T(\xi_1)$ zu erhalten, kann wieder auf die Verbindungslinie von x_1 und p zusammengezogen werden; die Werthe der zu integrirenden Function in $(x_1 e \xi_1)$ schliessen sich stetig an die in $T(x_1)$ an. Die Function (8.) verhält sich folglich in diesem Falle ähnlich wie diejenigen Integrale, in welchen x nur als obere Grenze und nicht gleichzeitig als Parameter vorkommt.

Man lasse zweitens die Grösse x, vom Punkte x_1 aus, einen positiven Umlauf $x_1 e \xi_1$ um den Punkt g ausführen, wo ξ_1, wie oben, einen unendlich wenig von x_1 entfernten Punkt bezeichnet. Auf dem von der x-Curve begrenzten Flächenstück möge, abgesehen von g, kein singulärer Punkt der Function $f(w)$ liegen. Den zu $T(\xi_1)$ gehörigen Integrationsweg $g x_1 e \xi_1$ zerlegt man wieder in die Strecken $g x_1$ und $x_1 e \xi_1$. Durchläuft x die Curve $x_1 e \xi_1$, so ändert sich in den Integralelementen der Strecke $g x_1$ die zu integrirende Function in der Art, dass der schliessliche Werth dieser Function gleich dem Product aus ihrem anfänglichen Werthe und der Constante $e^{2\pi i\lambda}$ ist; denn da die Punkte w der genannten Strecke von der Bahn der Grösse x umschlossen werden, so ist für dieselben die Potenz $(w-\xi_1)^\lambda$ bis auf einen unendlich kleinen Unterschied gleich $e^{2\pi i\lambda}(w-x_1)^\lambda$. Das in $T(\xi_1)$ enthaltene Integral $(g x_1)$ wird also durch das Product aus $e^{2\pi i\lambda}$ und $T(x_1)$ dargestellt. In dem Integral $(x_1 e \xi_1)$, welches den übrigen Bestandtheil von $T(\xi_1)$ ausmacht, ersetzt man den Integrationsweg durch die geradlinige Strecke*) $x_1 g'$, die dicht vor g endigen möge, durch einen kleinen Kreis um g und durch die geradlinige Strecke $g'\xi_1$. Das Integral längs des Kreises liefert nach der Voraussetzung nur einen verschwindenden Beitrag zu $T(\xi_1)$, wenn der

Fig. 6.



*) In Figur 6 sollen die beiden von x_1 und ξ_1 ausgehenden Geraden in g' zusammentreffen.

Kreisradius genügend klein gewählt wird. Das Integral $(x_1 g')$ hebt sich gegen das ersterwähnte Integral $(g x_1)$; die Grösse $T(\xi_1)$ ist daher mit dem Integral $(g'\xi_1)$ identisch. Der anfänglich fixirte Werth der Function $f(w)$ gehe, wenn w den Punkt g in positiver Richtung umkreist, in $f_1(w)$ über. Dann sind, da die Integrationsvariable den Umlauf um g ausgeführt hat, in dem Integral $(g'\xi_1)$ die Werthe $f_1(w)$ anzuwenden. Ausserdem hat man daselbst $e^{2\pi i\lambda}(w-x_1)^\lambda$ für die Potenz $(w-\xi_1)^\lambda$ zu substituiren, da die Werthe der letzteren auf der Strecke $g'\xi_1$ sich stetig an diejenigen anschliessen, die bei den vorhergehenden Strecken vorkommen. Indem man schliesslich den Punkt ξ_1 mit x_1 zusammenfallen lässt und statt x_1 wiederum x schreibt, ergiebt sich die Eigenschaft der Function (8.), dass bei einem positiven Umlauf der Grösse x um den Punkt g der anfängliche Werth $T(x)$ in den Ausdruck

$$(9.)\qquad e^{2\pi i\lambda}\int_g^x (w-x)^\lambda f_1(w)dw$$

übergeht. — Wird $f(w)$ durch ein Product

$$(10.)\qquad f(w) = (w-g)^r F(w)$$

dargestellt, wo r eine Constante und $F(w)$ eine in der Umgebung des Punktes $w=g$ eindeutige Function bedeutet, so ist:

$$f_1(w) = e^{2\pi i r}f(w).$$

In diesem Falle ändert sich bei einem Umlauf der Variablen x um den Punkt g die Function $T(x)$ nur in der Weise, dass zu ihr der Factor $e^{2\pi i(r+\lambda)}$ hinzutritt, woraus man schliesst, dass $T(x)$ gleich dem Product aus $(x-g)^{r+\lambda}$ und einer in der Umgebung des Punktes $x=g$ eindeutigen Function von x ist *).

Wird eine Kreisfläche $\mathfrak{K}$, welche ausser dem Punkte g keinen singulären Punkt von $f(w)$ enthält, um g als Mittelpunkt abgegrenzt, und sowohl die Grösse x als der Integrationsweg gx des Integrals (8.) auf diese Fläche $\mathfrak{K}$ beschränkt, so lässt sich, wenn $f(w)$ die Form (10.) hat, das Product $(x-g)^{-r-\lambda}T(x)$, als eindeutige Function von x, innerhalb $\mathfrak{K}$ in eine convergente, nach Potenzen von $x-g$ fortschreitende Reihe entwickeln. Ferner verschwindet dann $T(x)$ für $x=g$. Denn da nach der Voraussetzung das Integral (8.) convergent ist, und die Richtung, in welcher der Integrationsweg sich dem Punkte g nähert, für den Werth des Integrals nicht in Be-

*) Cfr. die Abhandlung des Herrn *E. Hossenfelder* „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung", Math. Ann. IV, pag. 195.

tracht kommen soll, so entsteht, wenn man in (8.) die obere Grenze x mit der unteren Grenze g zusammenfallen lässt, ein Integral längs einer geschlossenen, auf $\mathfrak{K}$ liegenden Curve, welches den Werth Null hat. Demnach verschwindet für $x = g$ auch ein Product $(x-g)^{\gamma-r-\lambda}T(x)$, in welchem γ irgend eine positive ganze Zahl bedeuten möge, welche grösser als der Modul von $r+\lambda$ ist. Die Reihenentwickelung des letztgenannten Productes enthält nur die positiven ganzen Potenzen von $x-g$. Hieraus folgt, dass in der oben erwähnten Reihenentwickelung des Products $(x-g)^{-r-\lambda}T(x)$ negative Potenzen von $x-g$, falls sie überhaupt vorhanden sind, nur in endlicher Anzahl vorkommen. Man bezeichne den Anfangsexponenten dieser Reihe durch l und die Zahl $r+l$ durch r'. Dann besteht für $T(x)$ die Gleichung

$$(11.)\quad T(x) = (x-g)^{r'+\lambda}\mathfrak{T}(x),$$

in welcher $\mathfrak{T}(x)$ eine in der Umgebung des Punktes g eindeutige, stetige und für $x = g$ von Null verschiedene Function bedeutet. Die Zahl r' kann in (10.) an Stelle von r gesetzt werden, da durch diese Gleichung nur derjenige Bestandtheil von r, der nicht ganzzahlig ist, definirt wird, und $r'-r$ eine ganze Zahl bedeutet. Aus dem Verschwinden der linken Seite von (11.) für $x = g$ folgt, dass der reelle Bestandtheil der Zahl $r'+\lambda$ positiv ist.

§ 3.

Die vorstehenden Betrachtungen bleiben gültig, wenn in (1.) und (8.) die Function $f(w)$ selbst ein bestimmtes Integral ist oder ein solches als Factor enthält. Denn die einzige Beschränkung, welcher man $f(w)$ unterwarf, lag in den Voraussetzungen, welche in Bezug auf die Art der Convergenz der Integrale $S(x)$ und $T(x)$ gemacht wurden. Man setze in (1.) und (8.) für $f(w)$ nach einander die Ausdrücke

$$(12.)\quad f(w) = Q(w)\int_{g_1}^{h_1}(v-w)^{\varkappa}P(v)dv$$

und

$$(13.)\quad f(w) = Q(w)\int_{g_1}^{w}(v-w)^{\varkappa}P(v)dv$$

ein, in denen $Q(w)$ nur von w, $P(v)$ nur von v abhängen soll, und g_1, h_1, $\varkappa$ Constante sind. Die auf den rechten Seiten von (12.) und (13.) stehenden Integrale, welche die Form (1.) und (8.) haben (nachdem w, v für x, w eingetreten ist), werden in derselben Weise wie die Integrale (1.) und (8.)

als convergent vorausgesetzt. Durch Einführung der Functionen (12.) und (13.) an Stelle von $f(w)$ entstehen aus (1.) die Doppelintegrale:

$$(14.)\quad \int_g^h (w-x)^\lambda Q(w)dw \int_{g_1}^{h_1} (v-w)^\varkappa P(v)dv,$$

$$(15.)\quad \int_g^h (w-x)^\lambda Q(w)dw \int_{g_1}^{w} (v-w)^\varkappa P(v)dv.$$

Dieselben sollen ebenfalls convergent sein. Man fügt, wie im § 1, in Bezug auf die Integrale (12.), (13.), (14.), (15.) die Bedingung hinzu, — welche auch für die später betrachteten mehrfachen Integrale gelten möge, — dass, wenn in unmittelbarer Nähe einer Integralgrenze eine beliebige unendlich kleine Curve gezogen wird, das längs dieser Curve genommene Integral (der hier vorkommenden, zu integrirenden Functionen) einen unendlich kleinen Werth habe. Sodann wird angenommen, dass in diesen — wie auch in den später behandelten — Integralen die Integrationswege nicht durch singuläre Punkte der bezüglichen, zu integrirenden Functionen hindurchgehen, und dass ein bestimmter Werth der letztgenannten Functionen an der unteren Integralgrenze fixirt werde.

Man setzt ausserdem voraus, dass sowohl in (14.) wie in (15.) die zwei Integrationswege gh und g_1h_1, resp. g_1w einander nicht durchschneiden. In Folge dieser Annahme wird der Werth der Potenz $(v-w)^\varkappa$ nirgends ein unbestimmter. Das Zusammentreffen eines Endpunktes des Weges von v mit einem Punkte des Weges von w (wie in (14.) für den Fall $g=g_1$ oder $h=h_1$ und wie in (15.)) macht das Integral nicht zu einem unbestimmten; auch kann man, gemäss der zuvor erwähnten Voraussetzung, eine jede Integralgrenze durch einen ihr unendlich nahen Punkt ersetzen. In dem Falle, dass, entgegen der obigen Festsetzung, die Integrationswege von v und von w eine Anzahl von Punkten gemeinsam haben, müssen weitere Bedingungen hinzutreten, wie z. B. die, dass $(v-w)^\varkappa$ reell und positiv sein soll, wenn die Werthe von v, w, $\varkappa$ dies gestatten.

Lässt man die Grösse x, welche in (14.) und (15.) Parameter der zu integrirenden Function ist, eine geschlossene Curve durchlaufen, so sind nach § 1 die Fälle zu unterscheiden, dass die x-Curve den Integrationsweg gh der Variablen w weder schneidet noch umschliesst, dass sie ihn zwar nicht schneidet, aber umschliesst, und dass sie ihn in einem oder in mehreren Punkten schneidet. Nennt man x_1 denjenigen Punkt, in welchem die x-Curve beginnt und endigt, so sind im erstgenannten Falle, da kein Integralelement

sich ändert, die Schlusswerthe der Integrale (14.) und (15.) für $x = x_1$ gleich den bezüglichen Anfangswerthen. Hieraus folgt, dass die Ausdrücke (14.) und (15.) in der Umgebung jedes beliebigen Punktes mit Ausnahme der Punkte $x = g$ und $x = h$ als eindeutige stetige Functionen von x anzusehen sind. Umschliesst die Bahn der Grösse x den Integrationsweg gh, und geschieht der Umlauf im positiven Sinne, so sind die Endwerthe von (14.) und (15.) gleich den Producten aus den anfänglichen Werthen und der Constante $e^{2\pi i\lambda}$. Man bemerke, dass hierbei der Umstand, ob die x-Curve den Integrationsweg $g_1 h_1$, resp. $g_1 w$ der Variablen v durchschneidet oder nicht, für die Doppelintegrale (14.) und (15.) unerheblich ist. Wird endlich der gegebene Integrationsweg der Variablen w durch die x-Curve geschnitten, so vermehren sich im Allgemeinen die Anfangswerthe der Integrale (14.) und (15.) um gewisse Summanden, deren Werth, je nachdem eine Grenze g, h umkreist wird oder nicht, mittelst der Gleichung (4.) oder (6.), resp. durch wiederholte Anwendung des im § 1 angegebenen Verfahrens zu bestimmen ist. Die durch das Variiren von x bewirkte Aenderung des Integrationsweges von w hat nach § 1 im Allgemeinen auch eine Aenderung des Integrationsweges der Variablen v zur Folge.

Werden die Ausdrücke (12.) und (13.) statt $f(w)$ in die Gleichung (8.) eingesetzt, so erhält man aus $T(x)$ die Doppelintegrale:

$$(16.)\qquad \int_g^x (w-x)^\lambda Q(w)\,dw \int_{g_1}^{h_1} (v-w)^\varkappa P(v)\,dv,$$

$$(17.)\qquad \int_g^x (w-x)^\lambda Q(w)\,dw \int_{g_1}^{w} (v-w)^\varkappa P(v)\,dv.$$

Die Betrachtung dieser Functionen soll hier auf gewisse Fälle beschränkt werden, in denen die Variable x einen positiven Umlauf um die untere Grenze g macht. Man nehme an, dass $Q(w)$ in der Umgebung des Punktes $w = g$ gleich einem Product

$$(18.)\qquad Q(w) = (w-g)^c \mathfrak{Q}(w)$$

sei, wo $\mathfrak{Q}(w)$ eine in der Umgebung des Punktes $w = g$ eindeutige Function und c eine Constante bezeichnet. Im § 2 wurde gezeigt, dass $T(x)$, wenn x den Punkt g im positiven Sinne umkreist, in den Ausdruck (9.) übergeht, in welchem $f_1(w)$ denjenigen Zweig der Function $f(w)$ bedeutet, der aus dem anfänglichen Werthe $f(w)$ durch einen positiven Umlauf der Variablen w um den Punkt g entsteht. In (16.) möge weder g_1 noch h_1 gleich g

sein; dann ist nach § 1 das Integral

$$\int_{g_1}^{h_1} (v-w)^{\varkappa} P(v)\, dv$$

in der Umgebung des Punktes $w = g$ eine eindeutige und stetige Function von w. Da $Q(w)$ bei dem Umlauf der Grösse w um den Punkt g den Factor $e^{2\pi ic}$ aufnimmt, so hat $f_1(w)$ hier den Werth $e^{2\pi ic} f(w)$; im vorliegenden Falle unterscheidet sich demnach der Ausdruck (9.) von (8.) nur durch den Factor $e^{2\pi i(c+\lambda)}$. Dies zeigt, dass das Doppelintegral (16.), sobald g_1 und h_1 von g verschieden sind, und $Q(w)$ die Form (18.) hat, in der Umgebung des Punktes $x = g$ gleich dem Product aus einer daselbst eindeutigen Function von x und der Potenz $(x-g)^{c+\lambda}$ ist.

In (17.) werde $g_1 = g$ genommen. Umkreist die Variable x den Punkt g, so ist auch auf das Integral (17.) das Resultat des § 2, wonach $T(x)$ sich in den Ausdruck (9.) verwandelt, anwendbar. Man hat nur festzustellen, welchen Werth die Function $f_1(w)$ in diesem Falle annimmt. Zunächst ergiebt sich, dass, wenn die Variable w eine kleine Curve um g (im positiven Sinne) beschreibt, das Integral

$$\int_{g}^{w} (v-w)^{\varkappa} P(v)\, dv$$

in das Product

$$e^{2\pi i\varkappa} \int_{g}^{w} (v-w)^{\varkappa} P_1(v)\, dv$$

übergeht (§ 2.), wo $P_1(v)$ diejenige Function ist, die aus der gegebenen Function $P(v)$ entsteht, wenn v einen positiven Umlauf um den Punkt $v = g$ ausführt. Da ausserdem (nach (18.)) $Q(w)$ den Factor $e^{2\pi ic}$ aufnimmt, so ist in (9.) für $f_1(w)$ jetzt die Grösse

$$e^{2\pi i(c+\varkappa)} Q(w) \int_{g}^{w} (v-w)^{\varkappa} P_1(v)\, dv$$

zu substituiren. Es möge in Analogie zu (18.) vorausgesetzt werden, dass die Function $P(v)$ die Form

$$(19.) \qquad P(v) = (v-g)^{b} \mathfrak{P}(v)$$

habe, wo unter $\mathfrak{P}(v)$ eine bei $v = g$ eindeutige Function von v, unter b eine Constante verstanden wird, so dass

$$P_1(v) = e^{2\pi ib} P(v)$$

ist. Dann gelangt man zu dem Satze, dass das Integral

$$(20.)\quad \int_g^x (w-x)^\lambda (w-g)^c \mathfrak{Q}(w)dw \int_g^w (v-w)^\varkappa (v-g)^b \mathfrak{P}(v)dv,$$

in welchem $\mathfrak{Q}(w)$, $\mathfrak{P}(v)$ bei $w=g$, resp. $v=g$ eindeutig sind, sich durch das Product aus der Potenz $(x-g)^{b+c+\varkappa+\lambda}$ und einer in der Umgebung des Punktes $x=g$ eindeutigen Function von x darstellen lässt.

Da für die Integrale (16.) und (20.) Voraussetzungen von derselben Art gelten, wie sie im § 2 für $T(x)$ angenommen wurden, so sind die am Schluss des § 2 angestellten Betrachtungen auch auf diese Integrale übertragbar.

Als Beispiele für die Doppelintegrale (14.), (15.), (16.), (20.) sind die particulären Integrale der zwei Differentialgleichungen anzuführen, welche den Gegenstand der §§ 6—9 der vorstehenden Abhandlung „Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung" bilden. Bezeichnet man, wie dort, durch $\Omega(v, w, x)$ die Function

$$(21.)\quad \Omega(v, w, x) = (w-x)^\alpha w^{\varrho-\alpha}(v-w)^{\beta-\varrho-1} v^{\alpha-\beta}(v-1)^{\sigma-\alpha-\beta}(v-k)^{\tau-\alpha-\beta},$$

so haben die Doppelintegrale

$$(22.)\quad \int_0^\infty dw \int_1^\infty \Omega(v, w, x)dv, \quad \int_0^\infty dw \int_k^\infty \Omega(v, w, x)dv,$$

welche wiederum als convergent vorausgesetzt werden, die Form des Ausdrucks (14.), und die Doppelintegrale

$$(23.)\quad \int_1^\infty dw \int_1^w \Omega(v, w, x)dv, \quad \int_k^\infty dw \int_k^w \Omega(v, w, x)dv$$

die des Ausdrucks (15.). Die Integrale (22.) und (23.) sind eindeutige stetige Functionen von x in der Umgebung jedes endlichen Punktes, wenn nur für die Integrale (22.) der Punkt $x=0$, für das erste Integral (23.) der Punkt $x=1$ und für das zweite Integral (23.) der Punkt $x=k$ ausgenommen wird. Auf das Integral (16.) kommen die particulären Lösungen (l. c. (61.))

$$(24.)\quad \int_0^x dw \int_1^\infty \Omega(v, w, x)dv, \quad \int_0^x dw \int_k^\infty \Omega(v, w, x)dv$$

zurück. Die Grenzen der Integration nach v sind verschieden von der unteren Grenze 0 der Integration nach w; die Constanten λ in (16.) und c in (18.) haben hier die Werthe $\lambda=\alpha$, $c=\varrho-\alpha$. Daher sind die Doppelintegrale (24.) gleich Producten aus der Potenz x^ϱ und einer bei $x=0$

eindeutigen Function von x. Von den Doppelintegralen

$$(25.)\quad \int_1^x dw \int_1^w \Omega(v, w, x)dv, \quad \int_k^x dw \int_k^w \Omega(v, w, x)dv$$

(l. c. (63.) und (65.)), welche die Gestalt von (20.) haben, ist das erstere gleich dem Product aus $(x-1)^{\sigma-\varrho-1}$ und einer bei $x=1$ eindeutigen Function von x, das letztere gleich dem Product aus $(x-k)^{\tau-\varrho-1}$ und einer bei $x=k$ eindeutigen Function von x. Denn hier sind die Constanten α, $\beta-\varrho-1$ statt λ, $\varkappa$ zu nehmen, während für c der Werth 0, für b der Werth $\sigma-\alpha-\beta$, resp. $\tau-\alpha-\beta$ eintritt. Von den Ausdrücken

$$(26.)\quad \int_0^1 dw \int_k^1 \Omega(v, w, x)dv, \quad \int_k^1 dw \int_k^w \Omega(v, w, x)dv$$

(l. c. (68.)) nimmt jeder den Factor $e^{2\pi i\alpha}$ auf, wenn die Variable x eine die Punkte 0, 1. und k umschliessende Curve durchläuft. — Weitere Beispiele liefern die Integrale (82.) bis (87.) der genannten Abhandlung.

Analoge Schlüsse wie für die Doppelintegrale gelten für die dreifachen, resp. m-fachen Integrale von der oben angegebenen Form. Die im Vorhergehenden bezeichneten Voraussetzungen über die Convergenz etc. werden auf diese mehrfachen Integrale übertragen. Man nenne ψ die Function

$$(27.)\quad \psi = (w-x)^{\lambda} Q(w)(v-w)^{\varkappa} P(v)(u-v)^{\vartheta} N(u),$$

in welcher Q nur von w, P nur von v, N nur von u abhängt, und λ, $\varkappa$, ϑ Constante sind. Dann kommen die im § 1 abgeleiteten Eigenschaften des Integrals (1.), denen zufolge $S(x)$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes, ausgenommen die Punkte $x=g$ und $x=h$, eine eindeutige stetige Function von x ist und, falls x einen Umlauf um den ganzen Integrationsweg gh macht, den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ aufnimmt, auch den Integralen

$$(28.)\quad \begin{cases} \int_g^h dw \int_{g_1}^{h_1} dv \int_{g_2}^{h_2} \psi du, & \int_g^h dw \int_{g_1}^{h_1} dv \int_{g_2}^{v} \psi du, \\ \int_g^h dw \int_{g_1}^{w} dv \int_{g_2}^{h_2} \psi du, & \int_g^h dw \int_{g_1}^{w} dv \int_{g_2}^{v} \psi du, \end{cases}$$

in denen die Grössen $g, \ldots h_2$ constant sind, zu, da diese Integrale nur besondere Fälle des Integrals (1.) darstellen. Das Nämliche gilt, wenn man durch φ die Function

$$(29.)\quad \begin{cases} \varphi = (w-x)^{\lambda} Q(w)(w_1-w)^{\lambda_1} Q_1(w_1)(w_2-w_1)^{\lambda_2} Q_2(w_2)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(w_{m-1}-w_{m-2})^{\lambda_{m-1}} Q_{m-1}(w_{m-1}) \end{cases}$$

bezeichnet, von dem m-fachen Integral:

$$(30.)\quad \int_g^h dw \int_{g_1}^{h_1} dw_1 \int_{g_2}^{h_2} dw_2 \dots \int_{g_{m-1}}^{h_{m-1}} \varphi\, dw_{m-1}.$$

Die Grössen g_ν, h_ν sind hier zunächst Constante. Jedoch kann in dem Integral (30.) jede der Grenzen h_ν, mit Ausnahme von h, durch den Werth $w_{\nu-1}$ ersetzt werden (h_1 durch w), ohne dass dasselbe aufhörte, die erwähnten Eigenschaften zu haben; denn in (1.) bedeutet $f(w)$ eine beliebige, nur durch die Bedingungen der Convergenz des Integrals (1.) eingeschränkte Function. Bei den Integralen (28.) setzt man voraus, dass der Integrationsweg von v weder den von w noch den von u durchschneidet, so dass die Potenzen $(v-w)^\varkappa$ und $(u-v)^\vartheta$ nirgends unbestimmt werden. Ebenso sollen in (30.) die Integrationswege von $w_{\nu-1}$ und w_ν einander nicht kreuzen.

Die in (27.) vorkommenden Functionen $P(w)$, $Q(v)$, $N(u)$ mögen nunmehr gleich Producten

$$(31.)\quad Q(w) = (w-g)^c \mathfrak{Q}(w),\quad P(v) = (v-g)^b \mathfrak{P}(v),\quad N(u) = (u-g)^a \mathfrak{N}(u)$$

genommen werden, in denen $\mathfrak{Q}(w)$, $\mathfrak{P}(v)$, $\mathfrak{N}(u)$ in der Umgebung des Punktes g eindeutige Functionen von w, resp. v, u bezeichnen. Dann ist in der Umgebung des Punktes $x = g$ jedes der dreifachen Integrale

$$(32.)\quad \int_g^x dw \int_{g_1}^{h_1} dv \int_{g_2}^{h_2} \psi\, du,\quad \int_g^x dw \int_{g_1}^{h_1} dv \int_{g_2}^{v} \psi\, du,$$

in denen die Constanten g_1 und h_1 als verschieden von g vorausgesetzt werden und die Constanten g_2, h_2 beliebig sind, gleich dem Producte aus $(x-g)^{c+\lambda}$ und einer bei $x = g$ eindeutigen Function von x, da die für das Integral (16.) benutzten Schlussfolgerungen sich hier wiederholen. Ferner ist das Integral

$$(33.)\quad \int_g^x dw \int_g^w dv \int_{g_2}^{h_2} \psi\, dv,$$

wenn keine der Constanten g_2, h_2 gleich g ist, durch das Product aus $(x-g)^{b+c+\varkappa+\lambda}$ und einer in der Umgebung des Punktes g eindeutigen Function von x darstellbar. Denn die Function (33.) entsteht aus dem Integral (20.), wenn in dasselbe statt $\mathfrak{P}(v)$ der bei $v = g$ eindeutige Ausdruck

$$\mathfrak{P}(v) \int_{g_2}^{h_2} (u-v)^\vartheta (u-g)^a \mathfrak{N}(u)\, du$$

eingesetzt wird. Endlich ist das dreifache Integral

$$(34.)\quad \int_g^x dw \int_g^w dv \int_g^v \psi\, du,$$

unter Voraussetzung der Gleichungen (31.), gleich dem Product aus $(x-g)^{a+b+c+\vartheta+\varkappa+\lambda}$ und einer bei $x=g$ eindeutigen Function von x. Das Integral (34.) wird aus dem in (8.) definirten Integral $T(x)$ durch die Substitution

$$f(w) = (w-g)^c \mathfrak{Q}(w)\int_g^w (v-w)^\varkappa (v-g)^b \mathfrak{P}(v)dv\int_g^v (u-v)^\vartheta (u-g)^a \mathfrak{R}(u)du$$

erhalten. In diesem Falle hat in (9.) die Grösse $f_1(w)$ den Werth

$$f_1(w) = e^{2\pi i(a+b+c+\vartheta+\varkappa)}f(w),$$

wie sich aus der oben erwähnten Eigenschaft des Integrals (20.) ergiebt. Also nimmt in der That das Integral (34.) den Factor $e^{2\pi i(a+b+c+\vartheta+\varkappa+\lambda)}$ auf, wenn x den Punkt g umkreist.

Analog werde in (29.)

$$(35.)\quad \begin{cases} Q(w) = (w-g)^c\mathfrak{Q}(w), \quad Q_1(w_1) = (w_1-g)^{c_1}\mathfrak{Q}_1(w_1), \quad \dots \\ \qquad\qquad Q_{m-1}(w_{m-1}) = (w_{m-1}-g)^{c_{m-1}}\mathfrak{Q}_{m-1}(w_{m-1}) \end{cases}$$

substituirt, wo $\mathfrak{Q}(w)$, $\mathfrak{Q}_1(w_1), \dots \mathfrak{Q}_{m-1}(w_{m-1})$ eindeutige Functionen ihres Arguments in der Umgebung des Punktes g bedeuten, während c, c_1, ... c_{m-1} constant sind. Dann ist das den Ausdrücken (20.) und (34.) entsprechende Integral

$$(36.)\quad \int_g^x dw\int_g^w dw_1\int_g^{w_1} dw_2\int_g^{w_2} dw_3 \dots \int_g^{w_{m-2}} \varphi\, dw_{m-1}$$

gleich dem Product aus der Potenz

$$(x-g)^{c+c_1+\dots+c_{m-1}+\lambda+\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}}$$

und einer in der Umgebung des Punktes $x=g$ eindeutigen Function von x, da der für (20.) und (34.) angegebene Beweis sich durch Inductionsschluss verallgemeinern lässt. Wird ferner durch s eine positive ganze Zahl, die kleiner als m ist, bezeichnet, und sind g_s und h_s zwei von g verschiedene Constanten, so wird das m-fache Integral

$$(37.)\quad \int_g^x dw\int_g^w dw_1\int_g^{w_1} dw_2 \dots \int_g^{w_{s-2}} dw_{s-1}\int_{g_s}^{h_s} dw_s\int_{g_{s+1}}^{h_{s+1}} dw_{s+1} \dots \int_{g_{m-1}}^{h_{m-1}} \varphi\, dw_{m-1}$$

durch das Product aus

$$(x-g)^{c+c_1+\dots+c_{s-1}+\lambda+\lambda_1+\dots+\lambda_{s-1}}$$

und einer bei $x=g$ eindeutigen Function von x dargestellt. Denn da der in (37.) enthaltene Ausdruck

$$(38.)\quad \int_{g_s}^{h_s} (w_s-w_{s-1})^{\lambda_s} Q_s(w_s)dw_s\int_{g_{s+1}}^{h_{s+1}} \dots \int_{g_{m-1}}^{h_{m-1}} (w_{m-1}-w_{m-2})^{\lambda_{m-1}} Q_{m-1}(w_{m-1})dw_{m-1}$$

in der Umgebung des Punktes g eine eindeutige und stetige Function von w_{s-1} ist, so verhält sich das Integral (37.) wie ein Integral von der Form (36.), falls man in letzterem s statt m schreibt. Dies bleibt gültig, wenn in (37.) eine beliebige Anzahl der oberen constanten Grenzen h_ν, ausgenommen h_s, durch die bezüglichen variablen Grenzen $w_{\nu-1}$ ersetzt wird; denn die Grösse (38.) ist auch in diesem Falle eine bei g eindeutige stetige Function von w_{s-1}.

Die fünf ersten Paragraphen der vorgedruckten Abhandlung liefern Beispiele zu den Integralen (28.), (32.), (33.), (34.). Die vier Formen der obigen dreifachen Integrale (28.) finden sich wieder in den zwei Integralen (34.) und den ersten zwei Integralen (35.) jener Abhandlung. Die zwei übrigen dort vorkommenden Integrale (35.) entsprechen den zwei Fällen der obigen Integrale (32.), während die dort mit (29.) bezeichneten Integrale auf die hier unter (33.) und (34.) aufgeführten Ausdrücke zurückkommen. Als Beispiele für die Functionen von der Form (30), (36.), (37.) sind die $(n-1)$-fachen Integrale zu erwähnen, welche der allgemeineren hypergeometrischen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten genügen.

Kiel, im Juli 1886.

Der *Cauchy*sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Der Fundamentalsatz von der Existenz der Integrale von Differentialgleichungen ist bekanntlich zuerst von *Cauchy* aufgestellt *) und bewiesen worden, und die Herren *Briot* und *Bouquet* haben den Beweis für diesen Satz sowohl für eine als auch für mehrere Differentialgleichungen erster Ordnung wesentlich vereinfacht. Trotzdem ist diesem, sowie den für specielle Differentialgleichungen später gelieferten Beweisen die einfachste Form, wie ich glaube, nicht gegeben, und es ist deshalb vielleicht gestattet, diesen Satz ganz allgemein in einigen Zeilen ohne Benutzung irgend welcher Hülfssätze aus der Theorie der complexen Integrale zu entwickeln.

Der Satz, der im Folgenden bewiesen werden soll, lautet folgendermassen:

Die Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad y^{(m)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{r}\, a(x-\xi)^{n}(y-\eta)^{n_0}(y'-\eta_1)^{n_1}\ldots(y^{(m-1)}-\eta_{m-1})^{n_{m-1}},\quad (n+n_0+n_1+\cdots+n_{m-1}=r)$$

deren rechte Seite convergent ist, hat stets ein nach ganzen positiven Potenzen von $x-\xi$ entwickelbares Integral, das für $x=\xi$ nebst seinen $m-1$ ersten Ableitungen die Werthe $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1}$ annimmt.

Bemerkt man zunächst, dass die Substitutionen

$$(2.)\qquad x-\xi = X,\quad y-\eta = Y+\frac{\eta_1}{1!}X+\frac{\eta_2}{2!}X^2+\cdots+\frac{\eta_{m-1}}{(m-1)!}X^{m-1}$$

die Differentialgleichung (1.) in die folgende

$$(3.)\qquad Y^{(m)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\varrho}\, \alpha X^{\nu} Y^{\nu_0} Y'^{\nu_1}\ldots Y^{(m-1)^{\nu_{m-1}}}\qquad (\nu+\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}=\varrho)$$

---

*) Vergl. auch *Weierstrass*, dieses Journal, Bd. 51, S. 43.

überführen, in welcher der obigen Bestimmung zufolge jetzt dem $X=0$ die Werthe $Y=Y'=\cdots=Y^{(m-1)}=0$ entsprechen sollen, um die herum die Reihe auf der rechten Seite von (3.) convergirt, und dass, wenn R, R_0, $R_1, \dots R_{m-1}$ die Convergenzradien bedeuten, und $\varkappa$ eine positive Grösse darstellt, welche kleiner ist als der kleinste dieser Radien, die Substitutionen

$$X=\varkappa x,\quad Y=\varkappa y$$

die Differentialgleichung (3.) in

$$(4.)\qquad y^{(m)} = \sum_0^\infty{}_r A x^\mu y^{\mu_0} y'^{\mu_1} \dots y^{(m-1)\mu_{m-1}} \qquad (\mu+\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}=r)$$

überführen, deren um die Nullpunkte gezogenen Convergenzkreise Radien besitzen, die grösser als die Einheit sind, so werden die A, da die Reihe für $x=y=y'=\cdots=1$ convergirt, sämmtlich endlich sein, und es mag der grösste Modul derselben mit M bezeichnet werden; zu beweisen ist, dass eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe für y existirt, welche nebst ihren $m-1$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwindet, und der Differentialgleichung (4.) genügt. Stellt man zum Beweise mit (4.) die Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \begin{cases} \eta' = M(1+2\xi+3\xi^2+4\xi^3+\cdots)(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots)(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots)\dots \\ \qquad\qquad \dots(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots) \end{cases}$$

zusammen, worin die letzten gleichen Potenzreihen m-mal wiederholt sind, und betrachtet dasjenige Integral dieser Differentialgleichung, das für $\xi=0$ verschwindet, so sieht man unmittelbar, dass mod. $y_0^{(m)} \leqq$ mod. η_0' ist; da aber der Differentiationsprocess in (4.) und (5.) ausgeführt analoge Posten in beiden Gleichungen, in der letzteren nur in grösserer Zahl und mit grösseren positiven Coefficienten versehen liefert, so ist allgemein

$$\text{mod. } y_0^{(m+\lambda)} \leqq \eta_0^{(\lambda+1)},$$

und somit die Reihe

$$(6.)\qquad y = \frac{y_0^{(m)}}{m!}x^m + \frac{y_0^{(m+1)}}{(m+1)!}x^{m+1}+\cdots$$

convergent, wenn es die Reihe

$$(7.)\qquad \eta = \frac{\eta_0'}{1!}\xi + \frac{\eta_0''}{2!}\xi^2+\cdots$$

ist. Da aber (5.) die Form hat

$$(8.)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{M(1+2\xi+3\xi^2+\cdots)}{(1-\eta)^m},$$

woraus

$$\frac{-(1-\eta)^{m+1}}{m+1}+\frac{1}{m+1} = \frac{M\xi}{1-\xi}$$

folgt, so wird ξ als Potenzreihe von η, also auch η als Potenzreihe von ξ darstellbar sein, und somit (7.), also auch (6.) convergiren. Dass (6.) ein Integral von (4.) ist, leuchtet von selbst ein, da die aus (4.) berechneten Werthe von $y_0^{(m)}$, $y_0^{(m+1)}$, ... nichts anderes aussagen, als dass $y^{(m)}$ sowohl für $x=0$ als auch für alle weiteren x der Gleichung (4.) genügt, d. h. dass y ein Integral der Differentialgleichung (4.) ist.

Wenn sich auch der gegebene Beweis von der Existenz eines eindeutigen Integrales einer Differentialgleichung im Princip von dem *Cauchy*-schen nicht wesentlich unterscheidet, so habe ich doch in wenigen Zeilen die formale Seite des Beweises so darstellen wollen, wie sie sich mir in nächstens zu veröffentlichenden Untersuchungen über die Natur der Integrale algebraischer Differentialgleichungen um singuläre Punkte herum als zweckmässig erwiesen hat.

Heidelberg, im Februar 1888.

Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper.

(Von Herrn *Paul Jaerisch* in Hamburg.)

Die Elasticitätsgleichungen werden in der von *Lamé* in allgemeine orthogonale Coordinaten transformirten Form bei der Behandlung des obigen Problems zu Grunde gelegt. Diese Gleichungen sind für das Gleichgewicht eines Rotationskörpers von Herrn *A. Wangerin* *) allgemein integrirt nach einer Methode, durch welche *Lamé* in seiner Abhandlung: „Sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques", (*Liouville* Journal XIX. 1854) die Gleichungen in Kugelcoordinaten löst. Diese Methode reicht indessen nicht zur Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen eines Körpers aus. Denn die Hilfsgrössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, für welche *Lamé* eine ähnliche Entwickelung annimmt, wie sich ihm für die Volumenänderung θ ergeben hat, und welche er durch die Differentialgleichungen als Functionen von θ bestimmt, um aus denselben dann die Componenten der elastischen Verrückung zu erhalten, — diese Hilfsgrössen sind in den Gleichungen für die Schwingungen eines Massenelements von θ unabhängig, wie gezeigt werden soll. Wir haben daher bei der Lösung des obigen Problems einen anderen Weg einzuschlagen. Dieser wird im Allgemeinen derjenige sein, den ich in meinen Arbeiten: „Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel" (dieses Journal, Bd. 88) sowie über das Gleichgewicht von Kugel und Kreiscylinder (Mittheilungen der math. Gesellschaft zu Hamburg 1886) gewählt habe.

Meine Methode die Elasticitätsgleichungen aufzulösen besteht darin,

---

*) *Wangerin:* Ueber das Gleichgewicht elastischer Rotationskörper. Berlin 1873.

dass ich nach Trennung der beiden Fälle $\theta = 0$ und $\theta \gtrless 0$ für die Componenten der Verrückung, sowie für die Grössen 𝔄, 𝔅, ℭ Ausdrücke mit gewissen unbestimmten Functionen so wähle, dass die Differentialgleichungen zum Theil identisch erfüllt werden. Durch diese Methode gelangte ich auch bei dem vorliegenden allgemeineren Problem zur Integration der Differentialgleichungen. Es ergeben sich für die Componenten der elastischen Verrückung Werthe, welche bei specieller Annahme über die Coordinaten in die *Lamé*schen Lösungen für das Gleichgewicht der Kugel, sowie in meine Lösungen für die Schwingungen der Kugel übergehen. Aber die Behandlung des allgemeineren Problems führt noch zu neuen Lösungen für die Elasticitätsgleichungen der Kugel, die sich bei specieller Behandlung nicht ergeben haben. Der Grund dafür liegt in der symmetrischen Form, welche die Elasticitätsgleichungen in den allgemeineren Coordinaten annehmen.

Bei den speciellen Problemen konnte das System simultaner partieller Differentialgleichungen direct in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen verwandelt werden. Bei dem allgemeineren Probleme erreiche ich dies durch Transformation auf ein anderes Coordinatensystem (x, r, φ). Dadurch werden die Componenten in einer für alle Rotationskörper gültigen Form hergestellt. Und da sich die Ausdrücke, welche in diesen Coordinaten erhalten werden, leicht in die alten Coordinaten umsetzen lassen, so ergeben sich die Componenten für jeden Rotationskörper in der, besonders für die Betrachtung der Schwingungen, geeigneten Form, nämlich entwickelt nach den Producten von drei Functionen, deren jede nur von einer derjenigen drei unabhängigen Variablen ξ, η, φ abhängt, welche als Parameter der drei dem Körper eigenen orthogonalen Flächenschaaren eingeführt sind.

Dabei gelangen wir zu einem allgemeinen Satze, der für alle Rotationskörper gilt, aber bisher nur für das Gleichgewicht derselben ausgesprochen ist *):

Die Integration des Systems simultaner partieller Differentialgleichungen elastischer isotroper Rotationskörper lässt sich zurückführen auf die Lösung der Gleichung

$$\Delta^2 u + \alpha^2 u = 0,$$

welche für das Gleichgewicht, wo die Constante $\alpha = 0$ ist, in die Potentialgleichung übergeht.

---

*) *Wangerin* a. a. O.

Die Lösung der Potentialgleichung ist für die folgenden Rotationskörper bekannt: Kugel, Kreiscylinder, Kegel, excentrische Kugelschale, Kreisring, Rotationsellipsoid (*Riemann* *), *Heine* **), *C. Neumann* ***), *Wangerin* †)); die Lösung der Gleichung $\Delta^2 u + \alpha^2 u = 0$ dagegen nur für den Kreiscylinder, die Kugel und das Rotationsellipsoid **).

Den Oberflächen- sowie Anfangsbedingungen kann durch die willkürlichen Constanten der für die Schwingungen erhaltenen Lösungen in mehrfacher Weise genügt werden, so dass man mehrere Schwingungszustände eines Rotationskörpers zu unterscheiden hat, wie ich bei Behandlung des Kugelproblems (dieses Journal, Bd. 88) näher ausgeführt habe. Besonders einfach gestalten sich die Formeln für die Torsionsschwingungen. Es treten dabei gewisse Knotenflächen auf, die für jeden Rotationskörper zweien der drei Schaaren orthogonaler Flächen desselben angehören. Wir behandeln, um ein Beispiel durchzuführen, die Torsionsschwingungen des Rotationsellipsoids.

Im letzten Theile wende ich die gleiche Methode zur Integration der Gleichungen für das Gleichgewicht des Rotationskörpers unter der Voraussetzung an, dass auf die Massenelemente desselben keine anderen Kräfte als die elastischen Druckkräfte wirken. Wir können uns hier kurz fassen, da das Problem unter dieser Voraussetzung schon eingehendere Behandlung gefunden hat (*Wangerin* a. a. O.). Man denkt sich, wie beim Schwingungsproblem, die Componenten in zwei Theile zerlegt, für deren einen die Volumenänderung θ verschwindet, und führt das System partieller Differentialgleichungen wieder durch Transformation in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Zum Schluss zeige ich, dass die gewonnenen Lösungen die bekannten *Lamé*schen Lösungen für das Gleichgewicht der Kugel enthalten.

Vor Behandlung des vorliegenden Problems werden drei allgemeine Sätze, die für jedes orthogonale Coordinatensystem gelten, und von denen wir im Folgenden Gebrauch machen, abgeleitet. Diese sind:

---

*) *Riemann:* Ueber das Potential eines Ringes.

**) *Heine*: Handbuch der Kugelfunctionen.

***) *C. Neumann:* Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines Körpers, der von zwei nicht concentrischen Kugeln begrenzt wird. Halle 1862. Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe. Halle 1864.

†) *Wangerin* a. a. O.

1. *Die longitudinalen Theile der Componenten der Schwingungen eines Massentheilchens elastischer Körper sind in eindeutiger Weise gegeben und zwar bei ebenen Coordinaten gleich den Differentialquotienten der Volumenänderung nach den Coordinaten.*

Hiermit ist das Schwingungsproblem elastischer Körper auf die Bestimmung der Transversalschwingungen zurückgeführt.

2. *Die Componenten der Elementarrotation sind für elastische Schwingungen eines Massentheilchens vom longitudinalen Theile der Componenten der Verrückung unabhängig und proportional dem transversalen Theile.*

Nach diesem Satze erhält man sofort eine zweite Lösung der Differentialgleichungen für die Transversalschwingungen, sobald eine solche bekannt ist.

3. *Eine Lösung der Elasticitätsgleichungen für das Gleichgewicht ist stets bekannt, sobald die elastischen Kräfte nur allein wirken; und zwar sind die Componenten für ebene Coordinaten die Differentialquotienten der Potentialfunction für einen äusseren Punkt nach den Coordinaten.*

§ 1.

Die Elasticitätsgleichungen in allgemeinen orthogonalen Coordinaten.

Bezeichnet man mit ϱ, ϱ_1, ϱ_{11} die Parameter dreier Schaaren orthogonaler Flächen, die definirt werden durch die Gleichungen:

$$\varrho = f(x, y, z), \quad \varrho_1 = f_1(x, y, z), \quad \varrho_{11} = f_{11}(x, y, z);$$

und bezeichnet man mit R, R_1, R_{11} die Projectionen der Verrückung des Massentheilchens M auf die Normalen derjenigen drei dieser orthogonalen Flächen, welche sich in M schneiden, so nehmen die Elasticitätsgleichungen in diesen allgemeinen Coordinaten ϱ, ϱ_1, ϱ_{11} nach *Lamé* *) folgende Form an:

$$(\mathrm{I.})\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_{11}} - \dfrac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\dfrac{h}{h_1 h_{11}}\dfrac{d\theta}{d\varrho} + \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h_1 h_{11}} F - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h_1 h_{11}}\dfrac{d^2 R}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{C}}{d\varrho} - \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_{11}} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\dfrac{h_1}{h_{11} h}\dfrac{d\theta}{d\varrho_1} + \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h_{11} h} F_1 - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h_{11} h}\dfrac{d^2 R_1}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1} - \dfrac{d\mathfrak{B}}{d\varrho} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\dfrac{h_{11}}{h h_1}\dfrac{d\theta}{d\varrho_{11}} + \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h h_1} F_{11} - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h h_1}\dfrac{d^2 R_{11}}{dt^2}, \end{cases}$$

wo λ und μ die beiden Elasticitätsconstanten, δ die Dichtigkeit des Mediums,

---

*) *Lamé* a. a. O.

F, F_1, F_{11} die Componenten der auf M wirkenden äusseren Kräfte, zerlegt nach den Normalen in M der drei Flächen ϱ, ϱ_1, ϱ_{11}, bedeuten, und wo h, h_1, h_{11}, die Volumenänderung θ und die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zur Abkürzung für folgende Grössen dienen:

$$\text{(II.)} \quad \frac{1}{h^2} = \left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2;$$

die Formeln für $\frac{1}{h_1^2}$ und $\frac{1}{h_{11}^2}$ entstehen hieraus, wenn ϱ durch ϱ_1 und ϱ_{11} ersetzt wird;

$$\text{(III.)} \quad \theta = h h_1 h_{11} \left\{ \frac{d\frac{R}{h_1 h_{11}}}{d\varrho} + \frac{d\frac{R_1}{h_{11} h}}{d\varrho_1} + \frac{d\frac{R_{11}}{h h_1}}{d\varrho_{11}} \right\};$$

$$\text{(IV.)} \quad \frac{h}{h_1 h_{11}} \mathfrak{A} = \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\varrho_{11}} - \frac{d\frac{R_{11}}{h_{11}}}{d\varrho_1}, \quad \frac{h_1}{h_{11} h} \mathfrak{B} = \frac{d\frac{R_{11}}{h_{11}}}{d\varrho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\varrho_{11}}, \quad \frac{h_{11}}{h h_1} \mathfrak{C} = \frac{d\frac{R}{h}}{d\varrho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\varrho}.$$

Die Oberflächenbedingungen werden später aufgestellt.

§ 2.

Bei Betrachtung der elastischen Schwingungen kann man, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, wie *Clebsch* in seiner Elasticitätstheorie gezeigt hat, sowohl von den auf das Massenelement als auf die Oberfläche wirkenden Kräften absehen, falls man als Gleichgewichtslage diejenige ansieht, welche der Körper unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Bei dieser Voraussetzung hat man in den Formeln (I.) zu setzen:

$$\text{(IV}^a.\text{)} \quad F = F_1 = F_{11} = 0.$$

Jetzt folgt aus den Gleichungen (I.) durch Differentiation derselben resp. nach ϱ, ϱ_1, ϱ_{11} und mit Rücksicht auf (III.) die Gleichung:

$$\text{(V.)} \quad \frac{d}{d\varrho} g \frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{d}{d\varrho_1} g_1 \frac{d\theta}{d\varrho_1} + \frac{d}{d\varrho_{11}} g_{11} \frac{d\theta}{d\varrho_{11}} = \frac{\delta}{\lambda + 2\mu} g g_1 g_{11} \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

wo, wie auch später, zur Abkürzung gesetzt sei:

$$\text{(VI.)} \quad g = \frac{h}{h_1 h_{11}}, \quad g_1 = \frac{h_1}{h_{11} h}, \quad g_{11} = \frac{h_{11}}{h h_1}.$$

Differentiirt man dagegen die zweite der Gleichungen (I.) nach ϱ_{11}, die dritte nach ϱ_1 nach Division beider Gleichungen resp. durch g_1 und g_{11},

so erhält man durch Subtraction eine Gleichung, die nur die Unbekannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und nicht θ enthält. Auf ähnliche Weise bildet man aus (I.) noch zwei andere Gleichungen. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\text{(VII.)} \begin{cases} \frac{d}{d\varrho_{11}}\frac{1}{g_1}\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_{11}}\right)-\frac{d}{d\varrho_1}\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho}\right) = -\frac{\delta}{\mu}g\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2}, \\ \frac{d}{d\varrho}\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho}\right)-\frac{d}{d\varrho_{11}}\frac{1}{g}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_{11}}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1}\right) = -\frac{\delta}{\mu}g_1\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2}, \\ \frac{d}{d\varrho_1}\frac{1}{g}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_{11}}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1}\right)-\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{g_1}\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_{11}}\right) = -\frac{\delta}{\mu}g_{11}\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit Rücksicht auf (V.), dass die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ für die Schwingungen eines Massenelements von θ unabhängig sind, wie in der Einleitung behauptet wurde. Die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hängen von der Elasticitätsconstante μ allein, θ von beiden Elasticitätsconstanten ab. Daher müssen, damit die Gleichungen (I.) bestehen, auch die Componenten der Schwingungen R, R_1, R_{11} in zwei Theile zerlegbar sein, deren einer, der longitudinale, von $\lambda+2\mu$, deren anderer, der transversale, nur von μ abhängt.

Wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\text{(VIII.)} \begin{cases} L = A_1\cos\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\delta}}\,lt+A_2\sin\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\delta}}\,lt, \\ M = B_1\cos\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\,mt \quad +B_2\sin\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\,mt, \end{cases}$$

wo die Constanten A und B durch die Anfangsbedingungen, l und m durch die Oberflächenbedingungen zu bestimmen sind, und wo zwischen l und m für coexistirende Longitudinal- und Transversalschwingungen die Gleichung

$$\text{(VIII}^a\text{.)} \quad \frac{\lambda+2\mu}{\delta}l^2 = \frac{\mu}{\delta}m^2$$

besteht, so hat man der Gleichungen (V.) und (VII.) wegen

$$\text{(IX.)} \quad \theta = \sigma L, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'M, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'M, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'M,$$

wo mit σ, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ Functionen bezeichnet werden, die von der Zeit unabhängig sind, und σ der Gleichung:

$$\text{(X.)} \quad \frac{d}{d\varrho}g\frac{d\sigma}{d\varrho}+\frac{d}{d\varrho_1}g_1\frac{d\sigma}{d\varrho_1}+\frac{d}{d\varrho_{11}}g_{11}\frac{d\sigma}{d\varrho_{11}}+l^2 gg_1g_{11}\sigma = 0$$

genügt. Die Functionen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ genügen Gleichungen, die aus (VII.) hervorgehen.

Zerlegt man nun die Componenten der Schwingungen R, R_1, R_{11} in der angegebenen Weise, so erhält man für dieselben, wie ich beim Schwingungsproblem der Kugel a. a. O. § 2 und 3 *) näher ausgeführt habe, folgende Ausdrücke:

$$\text{(XI.)}\quad \frac{R}{h} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varrho}L+uM,\quad \frac{R_1}{h_1} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varrho_1}L+vM,\quad \frac{R_{11}}{h_{11}} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varrho_{11}}L+wM.$$

Diese Ausdrücke genügen den Gleichungen (I.) mit Rücksicht auf (IV^a.), (IV.) und die obigen Festsetzungen, wenn u, v, w durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\text{(XII.)}\qquad \frac{d\mathfrak{B}'}{d\varrho_{11}} - \frac{d\mathfrak{C}'}{d\varrho_1} = m^2 g u,\qquad \frac{d\mathfrak{C}'}{d\varrho} - \frac{d\mathfrak{A}'}{d\varrho_{11}} = m^2 g_1 v,\qquad \frac{d\mathfrak{A}'}{d\varrho_1} - \frac{d\mathfrak{B}'}{d\varrho} = m^2 g_{11} w,$$

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, definirt sind durch:

$$\text{(XII}^a\text{.)}\qquad g\mathfrak{A}' = \frac{dv}{d\varrho_{11}} - \frac{dw}{d\varrho_1},\quad g_1\mathfrak{B}' = \frac{dw}{d\varrho} - \frac{du}{d\varrho_{11}},\quad g_{11}\mathfrak{C}' = \frac{du}{d\varrho_1} - \frac{dv}{d\varrho}.$$

Aus (XII.) und (XII^a.) leiten wir zwei Gleichungen ab, die zwar identisch erfüllt sein müssen durch jede Lösung jener Gleichungen, deren Form aber für die Wahl der zur Integration von (XII.) einzuführenden Functionen bestimmend sein wird. Diese Gleichungen sind:

$$\text{(XII}^b\text{.)}\qquad \frac{dgu}{d\varrho} + \frac{dg_1 v}{d\varrho_1} + \frac{dg_{11} w}{d\varrho_{11}} = 0,$$

$$\text{(XII}^c\text{.)}\qquad \frac{dg\mathfrak{A}'}{d\varrho} + \frac{dg_1\mathfrak{B}'}{d\varrho_1} + \frac{dg_{11}\mathfrak{C}'}{d\varrho_{11}} = 0.$$

Aus den Ausdrücken (XI.) für die Schwingungscomponenten R, R_1, R_{11} folgt, dass der longitudinale Theil derselben eindeutig ist, da die Grösse σ ihrer Bedeutung nach eindeutig ist, und dass die Bestimmung der Componenten desselben zurückgeführt ist auf die Integration der Gleichung (X.) für σ, also auf die Gleichung $\Delta^2\sigma+l^2\sigma = 0$. Ferner folgt aus (XII.) und (XII^a.) die Proportionalität der Grössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ mit u, v, w; denn die beiden Systeme gehen in einander über, wenn man setzt

$$\text{(XIII.)}\qquad \mathfrak{A}' = mu,\quad \mathfrak{B}' = mv,\quad \mathfrak{C}' = mw;$$

und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf (IX.), dass die Componenten einer Elementarrotation $\frac{1}{2}h\mathfrak{A}$, $\frac{1}{2}h_1\mathfrak{B}$, $\frac{1}{2}h_{11}\mathfrak{C}$ proportional sind den transversalen Theilen huM, h_1vM, $h_{11}wM$ der Componenten der Verrückung, wie oben

*) Dort ist statt A_2, B_2, Γ_2 in der dritten, vierten und siebenten Zeile S. 135 v. o. zu lesen A_1, B_1, Γ_1.

behauptet wurde. Man erhält daher, wenn eine Lösung u, v, w der Gleichungen (XII.) bekannt ist, durch (XIII.) und (XII^a.) eine zweite Lösung.

Für das Gleichgewicht erkennt man, falls $F = F_1 = F_{11} = 0$ ist, ohne Weiteres eine Lösung der Gleichungen (I.) nämlich:

$$\text{(XIV.)} \qquad \frac{R}{h} = \frac{df}{d\varrho}, \quad \frac{R_1}{h_1} = \frac{df}{d\varrho_1}, \quad \frac{R_{11}}{h_{11}} = \frac{df}{d\varrho_{11}},$$

wo f der Potentialgleichung:

$$\frac{d}{d\varrho} g \frac{df}{d\varrho} + \frac{d}{d\varrho_1} g_1 \frac{df}{d\varrho_1} + \frac{d}{d\varrho_{11}} g_{11} \frac{df}{d\varrho_{11}} = 0$$

genügt.

§ 3.

Die Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen der Rotationskörper. Bestimmung der longitudinalen Componenten.

Für die allgemeinen orthogonalen Coordinaten ϱ, ϱ_1, ϱ_{11} führen wir in die Elasticitätsgleichungen die Parameter ξ, η zweier Schaaren von Rotationsflächen mit gemeinsamer Rotationsaxe sowie den Winkel φ ein, den die durch das Massenelement des Körpers gelegte Meridianebene mit einer festen Meridianebene bildet. Die Axe des Rotationskörpers falle mit der Rotationsaxe der Flächen zusammen. Bei Einführung dieser Coordinaten folgen wir der obigen Abhandlung *Wangerins*, in welcher dieselben in der Elasticitätstheorie zuerst Verwendung fanden.

Setzt man

$$\text{(1.)} \qquad x + ir = f(\xi + i\eta),$$

wo x und r die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in der Meridianebene φ bezeichnen, so entstehen aus (1.) durch Trennung des Reellen und Imaginären zwei Gleichungen, welche zwei orthogonale Curvensysteme mit den Parametern ξ und η darstellen. Nun lasse man den Winkel φ von 0 bis 2π wachsen, so beschreiben die Curven dieser Systeme Flächen, welche mit den Meridianebenen drei Schaaren orthogonaler Flächen mit den Parametern ξ, η, φ bilden. Ferner sei

$$\text{(2.)} \qquad y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi.$$

Bevor wir diese Coordinaten in die Elasticitätsgleichungen einführen, mögen einige Transformationsformeln, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen, abgeleitet werden. Zunächst folgt aus (1.) durch partielle Diffe-

rentiation

$$(3.)\quad \frac{dx}{d\xi}=\frac{dr}{d\eta},\quad \frac{dx}{d\eta}=-\frac{dr}{d\xi};\quad \frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{d^2x}{d\eta^2}=0,\quad \frac{d^2r}{d\xi^2}+\frac{d^2r}{d\eta^2}=0.$$

Dann ergeben sich aus (II.) folgende Werthe für h, h_1, h_{11}:

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2}=\frac{1}{h_1^2}=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2, \quad h_{11}=\frac{1}{r}, \\ g=g_1=r,\quad g_{11}=\frac{1}{rh^2}. \end{cases}$$

Aus (3.) und (4.) erhält man für jede Function F von ξ und η:

$$(5.)\quad \frac{dF}{d\xi}\frac{dr}{d\xi}+\frac{dF}{d\eta}\frac{dr}{d\eta} = \frac{1}{h^2}\frac{dF}{dr},$$

$$(6.)\quad \frac{dF}{d\xi}\frac{dr}{d\eta}-\frac{dF}{d\eta}\frac{dr}{d\xi} = \frac{1}{h^2}\frac{dF}{dx};$$

in diesen Formeln kann gleichzeitig ξ mit x, η mit r, h mit $\frac{1}{h}$ vertauscht werden. Ferner ergiebt sich für zwei Functionen f und F:

$$(7.)\quad \frac{dF}{d\xi}\frac{df}{d\xi}+\frac{dF}{d\eta}\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{dF}{dr}\frac{df}{dr}+\frac{dF}{dx}\frac{df}{dx}\right),$$

$$(8.)\quad \frac{dF}{d\xi}\frac{df}{d\eta}-\frac{dF}{d\eta}\frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{h^2}\left(\frac{dF}{dr}\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dr}\right),$$

$$(9.)\quad \frac{d}{d\xi}f\frac{dF}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}f\frac{dF}{d\eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d}{dr}f\frac{dF}{dr}+\frac{d}{dx}f\frac{dF}{dx}\right).$$

§ 4.

Die Ausdrücke (XI.) für die Schwingungscomponenten und für θ nehmen durch Einführung der Coordinaten ξ, η, φ an Stelle von ϱ, ϱ_1, ϱ_{11} folgende Form an:

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{R}{h} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\xi}L+uM, \\ \frac{R_1}{h} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\eta}L+vM, \\ rR_{11} = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}L+wM, \\ \theta = \sigma L, \end{cases}$$

wo L und M durch (VIII.) definirt sind, und σ, u, v, w folgenden Gleichungen genügen, die aus (X.), (XII.) und (XII^a.), (XII^b.), (XII^c.) hervorgehen:

$$(11.)\quad \frac{d}{d\xi} r \frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{d}{d\eta} r \frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{1}{rh^2}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \frac{l^2 r\sigma}{h^2} = 0;$$

$$(12.)\quad \frac{d\mathfrak{B}'}{d\varphi} - \frac{d\mathfrak{C}'}{d\eta} = m^2 ru, \quad \frac{d\mathfrak{C}'}{d\xi} - \frac{d\mathfrak{A}'}{d\varphi} = m^2 rv, \quad \frac{d\mathfrak{A}'}{d\eta} - \frac{d\mathfrak{B}'}{d\xi} = \frac{m^2}{rh^2} w;$$

$$(12^a.)\quad r\mathfrak{A}' = \frac{dv}{d\varphi} - \frac{dw}{d\eta}, \quad r\mathfrak{B}' = \frac{dw}{d\xi} - \frac{du}{d\varphi}, \quad \frac{1}{rh^2}\mathfrak{C}' = \frac{du}{d\eta} - \frac{dv}{d\xi};$$

$$(12^b.)\quad \frac{dru}{d\xi} + \frac{drv}{d\eta} + \frac{1}{rh^2}\frac{dw}{d\varphi} = 0;$$

$$(12^c.)\quad \frac{dr\mathfrak{A}'}{d\xi} + \frac{dr\mathfrak{B}'}{d\eta} + \frac{1}{rh^2}\frac{d\mathfrak{C}'}{d\varphi} = 0.$$

Durch die Ausdrücke (10.) für die Componenten R, R_1, R_{11} ist die Bestimmung des longitudinalen Theils derselben zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung (11.), die in ebenen Coordinaten die Form

$$\Delta^2\sigma + \lambda^2\sigma = 0$$

hat. Bevor wir dazu übergehen, das Gleiche für den transversalen Theil nachzuweisen, also zu zeigen, dass die Integration des Systems (12.) auf eine Gleichung von gleicher Form zurückgeführt werden kann, möge in Betreff der Gleichung (11.) noch bemerkt werden, dass dieselbe, während ihre Integration in den Variablen ξ, η, φ die bestimmte Wahl des Rotationskörpers voraussetzt, eine für alle Rotationskörper gültige Lösung zulässt, die unter Umständen von Vortheil sein kann. Dazu transformiren wir die Gleichung (11.) in die Variablen x, r, φ. Bei Anwendung der Identität (9.) geht sie über in:

$$(13.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + l^2\sigma = 0.$$

Bezeichnet man ein Einzelintegral dieser Gleichung mit

$$(13^a.)\quad \sigma = \mathfrak{R} X \Phi,$$

wo mit $\mathfrak{R}$. X, Φ Functionen von r resp. x und φ allein bezeichnet werden, so zerfällt dieselbe in folgende drei bekannte Gleichungen:

$$(14.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} + \left(l^2 - \varkappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\mathfrak{R} = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \varkappa^2 X = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi = 0,$$

wo mit $\varkappa$ eine reelle oder imaginäre Constante, mit ν eine reelle Constante bezeichnet wird. ν muss reell sein, weil in Beziehung auf φ nur periodische Functionen und zwar mit der Periode 2π auftreten können.

§ 5.

Bestimmung der transversalen Schwingungscomponenten.

Wir haben das System simultaner partieller Differentialgleichungen (12.) zu integriren. Die Methode, welche mich zur Integration dieser Gleichungen führt, lässt sich kurz folgendermassen charakterisiren: Ich suche für die Grössen u, v, w sowie für $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ solche Ausdrücke mit vorläufig unbestimmten Functionen zu gewinnen, dass zunächst die Gleichungen (12^a.) und (12^c.) identisch erfüllt werden. Dies ist leicht möglich. Für diese so bestimmten Werthe u, v, w, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ gehen die Gleichungen (12.) in ein System partieller Differentialgleichungen über, welches sich durch Transformation in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen lässt.

Anstatt zuerst die Gleichungen (12^a.) und (12^c.) durch ein Werthsystem u, v, w, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ in unbestimmten Functionen identisch zu erfüllen, hätte man auch eine identische Lösung der Gleichungen (12.) und (12^b.) suchen und die unbestimmten Functionen durch die Gleichungen (12^a.) und (12^c.) näher bestimmen können. Aber der erstere Weg ist darum vorzuziehen, weil derselbe auch für die Integration der Gleichungen für das Gleichgewicht anwendbar bleibt. Denn die Gleichungen (12^a.) und (12^c.) behalten für das Gleichgewicht ihre Form, nicht die Gleichungen (12.) und (12^b.).

Es seien ϑ, A, B drei Functionen von ξ und η, und Φ sei eine Function von φ, die in (14.) definirt ist, so werden die Gleichungen (12^a.) und (12^c.) identisch erfüllt durch folgende Annahme:

$$(15.)\quad \begin{cases} u = \left(\dfrac{d\vartheta}{d\xi} - B\right)\Phi, & \mathfrak{A}' = \dfrac{A}{r}\dfrac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v = \left(\dfrac{d\vartheta}{d\eta} + A\right)\Phi, & \mathfrak{B}' = \dfrac{B}{r}\dfrac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w = \vartheta\dfrac{d\Phi}{d\varphi}; & \mathfrak{C}' = -C\Phi, \end{cases}$$

wo C zur Abkürzung dient für:

$$(15^a.)\qquad C = rh^2\left(\frac{dA}{d\xi} + \frac{dB}{d\eta}\right).$$

Da die Ausdrücke u, v, w in (15.) drei unbestimmte Functionen enthalten, so stellen sie den allgemeinsten Ausdruck für eine Einzellösung dar. Die Functionen ϑ, A, B sind durch die Gleichungen (12.) zu bestimmen. Diese gehen durch (15.) über in:

$$(16.)\quad \begin{cases} -\frac{\nu^2}{r}B+\frac{dC}{d\eta} = m^2r\frac{d\vartheta}{d\xi}-m^2rB, \\ \frac{\nu^2}{r}A-\frac{dC}{d\xi} = m^2r\frac{d\vartheta}{d\eta}+m^2rA, \\ \frac{d\frac{A}{r}}{d\eta}-\frac{d\frac{B}{r}}{d\xi} = \frac{m^2}{rh^2}\vartheta. \end{cases}$$

Hierzu kommt die Gleichung, welche aus (12^b.) hervorgeht:

$$(17.)\quad \frac{d}{d\xi}r\frac{d\vartheta}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}r\frac{d\vartheta}{d\eta}-\frac{\nu^2}{rh^2}\vartheta = \frac{drB}{d\xi}-\frac{drA}{d\eta}.$$

Die Gleichungen (16.) und (17.) bleiben ungeändert, wenn in (15.) Φ durch $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ durch $-\nu^2\Phi$ ersetzt wird.

§ 6.

Die Gleichungen (16.) und (17.) haben noch nicht die gewünschte Form, so dass nach Transformation in die Coordinaten x, r, φ die Zurückführung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen möglich wäre. Dazu führen wir für A und B durch folgende Gleichungen zwei Functionen p und q ein:

$$(18.)\quad A = p\frac{dr}{d\xi}+q\frac{dr}{d\eta},\quad B = p\frac{dr}{d\eta}-q\frac{dr}{d\xi},$$

durch welche der Ausdruck (15^a.) für C die einfache Gestalt annimmt:

$$(18^a.)\quad C = r\frac{dp}{dr}+r\frac{dq}{dx}.$$

Zunächst erhält man nämlich mit Rücksicht auf (3.)

$$C = rh^2\left\{\frac{dp}{d\xi}\frac{dr}{d\xi}+\frac{dp}{d\eta}\frac{dr}{d\eta}+\frac{dq}{d\xi}\frac{dr}{d\eta}-\frac{dq}{d\eta}\frac{dr}{d\xi}\right\},$$

und dieser Ausdruck geht in (18^a.) über in Folge der Identitäten (5.) und (6.).

Ferner ist

$$\frac{dC}{d\eta} = \frac{dC}{dr}\frac{dr}{d\eta}+\frac{dC}{dx}\frac{dx}{d\eta}.$$

Diesen Ausdruck sowie die entsprechenden für $\frac{d\vartheta}{d\eta}$, $\frac{dC}{d\xi}$, $\frac{d\vartheta}{d\xi}$ formen wir durch (3.) um und tragen folgende Ausdrücke in die Gleichungen (16.) ein:

$$\frac{dC}{d\eta} = \frac{dC}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{dC}{dx}\frac{dr}{d\xi}, \quad \frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{d\vartheta}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{d\vartheta}{dx}\frac{dr}{d\xi},$$

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{dC}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{dC}{dx}\frac{dx}{d\xi}, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{d\vartheta}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{d\vartheta}{dx}\frac{dx}{d\xi}.$$

Setzen wir noch die Werthe (18.) für A und B, wo für $\frac{dr}{d\eta}$ nach (3.) $\frac{dx}{d\xi}$ geschrieben ist, in die Gleichungen (16.) ein, so gehen zunächst die ersten beiden dieser Gleichungen in folgende nach Division durch r über:

$$(19.)\quad \begin{cases} \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\left(p\frac{dx}{d\xi} - q\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{dC}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{dC}{dx}\frac{dr}{d\xi}\right) \\ \qquad = m^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{d\vartheta}{dx}\frac{dx}{d\xi}\right), \\ \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\left(p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dx}{d\xi}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{dC}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{dC}{dx}\frac{dx}{d\xi}\right) \\ \qquad = -m^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{d\vartheta}{dx}\frac{dr}{d\xi}\right). \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen einmal mit $\frac{dx}{d\xi}$ und $\frac{dr}{d\xi}$, dann mit $\frac{dr}{d\xi}$ und $\frac{dx}{d\xi}$, so gehen durch Addition und Subtraction folgende Gleichungen hervor:

$$(19^a.)\quad \begin{cases} \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)p + \frac{1}{r}\frac{dC}{dr} = m^2\frac{d\vartheta}{dx}, \\ \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)q + \frac{1}{r}\frac{dC}{dx} = -m^2\frac{d\vartheta}{dr}\ ^{*}). \end{cases}$$

Um in entsprechender Weise die dritte der Gleichungen (16.) sowie die Gleichung (17.) umzuformen, bilden wir zunächst aus (18.) die Ausdrücke $\frac{drB}{d\xi} - \frac{drA}{d\eta}$ und $\frac{d\frac{A}{r}}{d\eta} - \frac{d\frac{B}{r}}{d\xi}$. Es ergiebt sich mit Rücksicht auf (3.)

$$\frac{drB}{d\xi} - \frac{drA}{d\eta} = \frac{drp}{d\xi}\frac{dr}{d\eta} - \frac{drp}{d\eta}\frac{dr}{d\xi} - \left(\frac{drq}{d\xi}\frac{dr}{d\xi} + \frac{drq}{d\eta}\frac{dr}{d\eta}\right);$$

dann wegen (5.) und (6.)

$$(20^a.)\quad \frac{drB}{d\xi} - \frac{drA}{d\eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{drp}{dx} - \frac{drq}{dr}\right),$$

---

*) Dieselben Gleichungen würden sich ergeben haben, wenn man in den vorhergehenden die Factoren von $\frac{dx}{d\xi}$ und $\frac{dr}{d\xi}$, also die Factoren der von einander unabhängigen Differentiale dx und dr gleich Null gesetzt hätte.

und entsprechend

$$(20^b.)\qquad \frac{d\frac{A}{r}}{d\eta}-\frac{d\frac{B}{r}}{d\xi} = -\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\frac{p}{r}}{dx}-\frac{d\frac{q}{r}}{dr}\right).$$

Schliesslich transformiren wir die linke Seite der Gleichung (17.) durch die Identität (9.), indem wir f durch r, F durch ϑ ersetzen, und erhalten:

$$(20^c.)\qquad \frac{d}{d\xi}r\frac{d\vartheta}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}r\frac{d\vartheta}{d\eta}-\frac{\nu^2}{rh^2}\vartheta = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d}{dr}r\frac{d\vartheta}{dr}+r\frac{d^2\vartheta}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r}\vartheta\right).$$

Durch die Ausdrücke $(20^a.)$, $(20^b.)$, $(20^c.)$ erlangen die dritte Gleichung (16.) und die Gleichung (17.) die gewünschte Form. Ersetzen wir noch die ersten beiden Gleichungen (16.) durch die daraus hervorgegangenen Gleichungen $(19^a.)$, so erhält das Gleichungensystem (16.) und (17.) in den Coordinaten x und r folgende Gestalt:

$$(21.)\qquad \begin{cases} \left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)p+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dp}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2rq}{dr\,dx} = m^2\frac{d\vartheta}{dx}, \\ \left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)q+\frac{d^2p}{dr\,dx}+\frac{d^2q}{dx^2} = -m^2\frac{d\vartheta}{dr}, \\ \qquad \frac{dp}{dx}-r\frac{d\frac{q}{r}}{dr} = -m^2\vartheta; \end{cases}$$

$$(22.)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{d^2\vartheta}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\vartheta = \frac{dp}{dx}-\frac{1}{r}\frac{drq}{dr}.$$

Bevor wir uns mit der Integration der Gleichungen (21.) und (22.) beschäftigen, tragen wir die für A, B, C erhaltenen Werthe in (15.) ein und erhalten als Lösungen der Gleichungen (12.):

$$(23.)\qquad \begin{cases} u = \left(\frac{d\vartheta}{d\xi}-p\frac{dr}{d\eta}+q\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ v = \left(\frac{d\vartheta}{d\eta}+p\frac{dr}{d\xi}+q\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ w = \vartheta\frac{d\Phi}{d\varphi} \end{cases}$$

und nach § 2 (XIII.) als zweites Integralsystem derselben Gleichungen:

$$(23^a.)\qquad u=\mathfrak{A}',\quad v=\mathfrak{B}',\quad w=\mathfrak{C}',$$

wo der Proportionalitätsfactor $=1$ gesetzt ist, und wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, nach (15.), (18.) und $(18^a.)$ gegeben sind durch:

$$(23^b.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}' = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi}+\frac{q}{r}\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ \mathfrak{B}' = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\eta}-\frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ \mathfrak{C}' = -r\left(\frac{dp}{dr}+\frac{dq}{dx}\right)\Phi. \end{cases}$$

§ 7.

Zur Integration der Gleichungen (21.) und (22.) denken wir uns ϑ durch die dritte der Gleichungen (21.) bestimmt, so gehen die ersten beiden Gleichungen (21.) über in:

$$(24.)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dp}{dr}+\frac{d^2p}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)p = -2\frac{d\frac{q}{r}}{dx}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+\frac{d^2\frac{q}{r}}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\frac{q}{r} = 0. \end{cases}$$

Werden p und q durch diese Gleichungen bestimmt, so wird Gleichung (22.) identisch erfüllt. Bezeichnet man nun mit F eine Lösung der Gleichung:

$$(24^a.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2F}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)F = 0,$$

so ergiebt sich für die Gleichungen (24.) die Lösung:

$$(24^b.)\quad q = rF,\quad p = F'-xF,$$

wo F' derselben Gleichung (24ᵃ.) genügt, aber andere willkürliche Constanten als F enthält. Von der Richtigkeit des Ausdrucks für p überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{d^2xF}{dx^2} = x\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{dF}{dx}$$

ist. Den Werth für ϑ liefert nun die dritte der Gleichungen (21.) in folgender Form:

$$(24^c.)\quad \vartheta = \frac{1}{m^2}\left(\frac{dxF}{dx}+r\frac{dF}{dr}\right)-\frac{1}{m^2}\frac{dF'}{dx}.$$

Hiermit ist den Gleichungen (21.) und (22.) genügt, und zwar ist die Integration zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung (24ᵃ.).

Trägt man die obigen Werthe für p, q, ϑ in die Ausdrücke (23.) und (23[a].) für u, v, w ein und zwar einmal

$$q=0,\quad p=F',\quad \vartheta=-\frac{1}{m^2}\frac{dF'}{dx},$$

dann

$$q=rF,\quad p=-xF,\quad \vartheta=\frac{1}{m^2}\left(\frac{dxF}{dx}+r\frac{dF}{dr}\right),$$

so ergeben sich vier Lösungen der Gleichungen (12.). Wir unterscheiden dieselben durch untere Indices u_i, v_i, w_i und die zugehörigen F durch die gleichen Indices, ersetzen dabei F_1 durch $-F_1$ und erhalten:

$$(25^a.)\quad \begin{cases} u_1 = \left(\frac{1}{m^2}\frac{d^2F_1}{d\xi dx}+F_1\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ v_1 = \left(\frac{1}{m^2}\frac{d^2F_1}{d\eta dx}-F_1\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ w_1 = \frac{1}{m^2}\frac{dF_1}{dx}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(25^b.)\quad u_2=\frac{F_2}{r}\frac{dr}{d\xi}\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad v_2=\frac{F_2}{r}\frac{dr}{d\eta}\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad w_2=-r\frac{dF_2}{dr}\Phi;$$

$$(25^c.)\quad \begin{cases} u_3 = \left\{\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dxF_3}{dx}+r\frac{dF_3}{dr}\right)+xF_3\frac{dr}{d\eta}+rF_3\frac{dr}{d\xi}\right\}\Phi, \\ v_3 = \left\{\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dxF_3}{dx}+r\frac{dF_3}{dr}\right)-xF_3\frac{dr}{d\xi}+rF_3\frac{dr}{d\eta}\right\}\Phi, \\ w_3 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{dxF_3}{dx}+r\frac{dF_3}{dr}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(25^d.)\quad \begin{cases} u_4 = \left(-\frac{x}{r}F_4\frac{dr}{d\xi}+F_4\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v_4 = \left(-\frac{x}{r}F_4\frac{dr}{d\eta}-F_4\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w_4 = \left(rx\frac{dF_4}{dr}-r^2\frac{dF_4}{dx}\right)\Phi\ ^{*}). \end{cases}$$

---

*) Die Gleichungen (24.) haben ausser (24[b].) noch folgende Integrale

$$\frac{q}{r}=\frac{d^2F}{dx^2}+m^2F,\quad p=r\frac{d^2F}{drdx},$$

wie man aus der identischen Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2}{dx^2}r\frac{dF}{dr}+\left(m^2-\frac{v^2}{r^2}\right)r\frac{dF}{dr} = -2\frac{d^2F}{dx^2}-2m^2F$$

erkennt, wobei F die obige Bedeutung hat. Aber man gewinnt hierdurch kein neues Werthsystem u, v, w.

Ferner verliert die Lösung (24[b].) ihre Gültigkeit für ein von x unabhängiges q,

Hier sind F_1, F_2, F_3, F_4 Lösungen mit verschiedenen willkürlichen Constanten der Gleichung (24^a.), welche in den Variablen ξ, η nach Identität (9.) die Form erhält:

$$(25^e.)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}r\frac{dF}{d\xi}+\frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}r\frac{dF}{d\eta}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\frac{F}{h^2} = 0.$$

In den obigen Werthsystemen u_i, v_i, w_i sind x, r, h für jeden Rotationskörper als Functionen von ξ und η gegeben (cf. (1.) und (4.)).

§ 8.

Die Herleitung der Gleichungen (19^a.) aus (19.) erleidet eine Aenderung, wenn eine der beiden Grössen

$$p\frac{dx}{d\xi}-q\frac{dr}{d\xi}\quad\text{und}\quad p\frac{dr}{d\xi}+q\frac{dx}{d\xi}$$

verschwindet. In beiden Fällen können sich andere Lösungen der Gleichungen (12.) als die erhaltenen (25^a.), (25^b.), (25^c.), (25^d.) ergeben. Wir haben also Lösungen der Gleichungen (16.) aufzusuchen, wenn nach (18.) einmal $A = 0$, dann $B = 0$ ist.

Es sei zunächst $A = 0$. Die Gleichungen (16.) und (17.) nehmen mit Rücksicht auf den Werth (15^a.) für C folgende Form an:

$$(26.)\qquad \begin{cases} -\frac{\nu^2}{r}B+\frac{d}{d\eta}rh^2\frac{dB}{d\eta} = m^2r\frac{d\vartheta}{d\xi}-m^2rB, \\ -\frac{d}{d\xi}rh^2\frac{dB}{d\eta} = m^2r\frac{d\vartheta}{d\eta}, \\ -\frac{d\frac{B}{r}}{d\xi} = \frac{m^2}{rh^2}\vartheta, \end{cases}$$

$$(26^a.)\qquad \frac{d}{d\xi}r\frac{d\vartheta}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}r\frac{d\vartheta}{d\eta}-\frac{\nu^2}{rh^2}\vartheta = \frac{drB}{d\xi}.$$

Die Gleichung (26^a.) wird durch die Gleichungen (26.) identisch erfüllt, wie man leicht einsieht. ϑ denken wir uns durch die dritte Gleichung (26.)

---

weil dann auch p von q unabhängig wird. Doch sind die unter dieser Voraussetzung sich ergebenden Werthe für u, v, w in (25^a.) und (25^b.) enthalten.

Die Gleichungen (21.) und (22.) können noch auf einem anderen Wege integrirt werden, indem man nicht ϑ, sondern p eliminirt. Hierdurch gewinnt man theilweise andere Darstellungen der obigen Werthsysteme u_i, v_i, w_i.

bestimmt, dann gehen die beiden ersten in folgende Gleichungen über:

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} rh^2 \dfrac{d\frac{B}{r}}{d\xi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{d\eta} rh^2 \dfrac{dB}{d\eta} + \left(m^2 - \dfrac{\nu^2}{r^2}\right) B = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi} rh^2 \dfrac{dB}{d\eta} = r \dfrac{d}{d\eta} rh^2 \dfrac{d\frac{B}{r}}{d\xi}. \end{cases}$$

Diesen beiden Gleichungen kann B nur genügen für jeden Werth von ξ und η, wenn eine derselben identisch erfüllt wird. Dies kann nicht im Allgemeinen, sondern nur für bestimmte Coordinatensysteme ξ, η der Fall sein. Wir haben daher zu untersuchen: Für welche Rotationskörper sind x, r und h solche Functionen von ξ und η, dass einer der beiden Gleichungen (27.) jeder beliebige Werth für B genügt.

Es ist leicht einzusehen, dass die erste der Gleichungen (27.) nicht identisch erfüllt werden kann. Durch Ausführung der Differentiation in der zweiten Gleichung ergiebt sich nach Weglassung eines gleichen Gliedes auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\frac{dB}{d\eta}\frac{drh^2}{d\xi} = 2rh\frac{dB}{d\xi}\frac{dh}{d\eta} - h^2\frac{dr}{d\xi}\frac{dB}{d\eta} - rB\frac{d}{d\eta}\left(\frac{h^2}{r}\frac{dr}{d\xi}\right).$$

Diese Gleichung soll für jedes B identisch erfüllt sein und zerfällt daher in folgende drei Gleichungen:

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{drh^2}{d\xi} + h^2\dfrac{dr}{d\xi} = 0, \\ \dfrac{dh}{d\eta} = 0, \\ \dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{h^2}{r}\dfrac{dr}{d\xi}\right) = 0, \end{cases}$$

da weder h noch r den Werth 0 haben kann. Die erste dieser Gleichungen lässt sich nach Fortlassung des Factors $2h$ schreiben:

$$r\frac{dh}{d\xi} + h\frac{dr}{d\xi} = 0$$

und ergiebt

$$(28^a.)\quad rh = \psi(\eta),$$

wo ψ eine Function von η bezeichnet. Der zweiten Gleichung (28.) wegen ist h von η unabhängig und folglich der dritten Gleichung wegen auch $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\xi}$; daher muss r als Function von ξ und η die Form haben:

$$(28^b.)\qquad r = \xi_1\eta_1,$$

wo mit ξ_1 und η_1 Functionen von ξ resp. η bezeichnet werden.

Aus (28^a.) und (28^b.) folgt:

$$\xi_1\eta_1 h = \psi(\eta);$$

und weil h und ξ_1 von η unabhängig sind, so folgt hieraus zunächst

$$\psi(\eta) = \eta_1,$$

wo der zuzufügende constante Factor gleich 1 gesetzt werden konnte, und dann

$$(28^c.)\qquad h = \frac{1}{\xi_1}.$$

Durch die Werthe (28^b.) und (28^c.) werden die Gleichungen (28.) erfüllt. Wir können daher den Satz aussprechen: die zweite der Gleichungen (27.) wird für alle Rotationskörper identisch erfüllt, für welche die Function f in (1.) so gewählt werden kann, dass sich durch (3.) und (4.) für r und h Werthe von der Form (28^b.) und (28^c.) ergeben. Wir werden im nächsten Paragraphen untersuchen, welche Rotationskörper diesen Bedingungen genügen.

Durch die Werthe, welche sich für r und h ergeben haben, nimmt die erste der Gleichungen (27.) folgende Form an:

$$(29.)\qquad \frac{1}{\xi_1}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi_1}\frac{d\frac{B}{\xi_1}}{d\xi}+\frac{1}{\eta_1\xi_1^2}\frac{d}{d\eta}\eta_1\frac{d\frac{B}{\xi_1}}{d\eta}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{\xi_1^2\eta_1^2}\right)\frac{B}{\xi_1} = 0;$$

für ϑ erhält man aus der dritten Gleichung (26.) folgenden Werth:

$$\vartheta = -\frac{1}{m^2}\frac{1}{\xi_1}\frac{d\frac{B}{\xi_1}}{d\xi}.$$

Trägt man diesen Werth für ϑ in die Ausdrücke (15.) für u, v, w ein und setzt $A=0$, so ergeben sich folgende Lösungen der Gleichungen (12.):

$$(30^a.)\qquad \begin{cases} u_5 = \left(\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi_1}\frac{dF_5}{d\xi}+\xi_1 F_5\right)\Phi, \\ v_5 = \left(\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\xi_1}\frac{dF_5}{d\xi}\right)\Phi, \\ w_5 = \frac{1}{m^2}\frac{1}{\xi_1}\frac{dF_5}{d\xi}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(30^b.)\qquad u_6 = 0,\quad v_6 = \frac{F_6}{\eta_1}\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad w_6 = -\eta_1\frac{dF_6}{d\eta}\Phi.$$

Hier sind F_5 und F_6 Lösungen der Gleichung:

$$(30^c.)\quad \frac{1}{\xi_1}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi_1}\frac{dF}{d\xi}+\frac{1}{\xi_1^2\eta_1}\frac{d}{d\eta}\eta_1\frac{dF}{d\eta}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{\eta_1^2\xi_1^2}\right)F = 0;$$

und in $(30^a.)$ ist F_5 für $-F_5$ geschrieben, was der willkürlichen Constanten in F_5 wegen gestattet ist.

Wir haben ferner in (15.) $B=0$ zu setzen. Die Gleichungen (16.) nehmen dadurch folgende Form an:

$$(31.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\eta}rh^2\dfrac{dA}{d\xi} = m^2r\dfrac{d\vartheta}{d\xi}, \\ \dfrac{\nu^2}{r}A-\dfrac{d}{d\xi}rh^2\dfrac{dA}{d\xi} = m^2r\dfrac{d\vartheta}{d\eta}+m^2rA, \\ \dfrac{d\frac{A}{r}}{d\eta} = \dfrac{m^2}{rh^2}\vartheta. \end{cases}$$

Die Gleichung (17.) wird durch diese Gleichungen identisch erfüllt. Es sei ϑ durch die dritte Gleichung (31.) als Function von A angenommen. Die ersten beiden Gleichungen erhalten dadurch folgende Form:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}rh^2\frac{dA}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}rh^2\frac{d\frac{A}{r}}{d\eta}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)A = 0,$$

$$\frac{d}{d\eta}rh^2\frac{dA}{d\xi} = r\frac{d}{d\xi}rh^2\frac{d\frac{A}{r}}{d\eta}.$$

Dies sind dieselben Gleichungen wie (27.), nur ist B mit A, ξ mit η vertauscht. Daher gilt von denselben das von den Gleichungen (27.) Gesagte: Die zweite der Gleichungen wird identisch erfüllt, wenn man setzt

$$r=\xi_2\eta_2,\quad h=\frac{1}{\eta_2},$$

wo ξ_2, η_2 Functionen von ξ resp. η sind; denn beide Seiten gehen dadurch über in

$$\xi_2\frac{d^2\frac{A}{\eta_2}}{d\eta\, d\xi}.$$

Die Gleichungen (31.) liefern hiernach zwei Lösungen der Gleichungen (12.), welche aus $(30^a.)$ und $(30^b.)$ bei gleichzeitiger Vertauschung von ξ mit η, ξ_1 mit η_2, η_1 mit ξ_2, u mit v hervorgehen; diese Lösungen stellen daher keinen neuen Schwingungszustand des elastischen Körpers dar.

§ 9.

Wir haben nun zu untersuchen, für welche Rotationskörper das orthogonale Flächensystem ξ, η, φ so beschaffen ist, dass aus (1.), (3.) und (4.) für r und h Ausdrücke von der Form:

$$(32.)\qquad r = \xi_1\eta_1, \quad h = \frac{1}{\xi_1}$$

erhalten werden, wo ξ_1 und η_1 Functionen nur von ξ resp. η sind.

Nach (4.) soll die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2,$$

welche durch (32.) übergeht in:

$$\xi_1^2 = \left(\frac{d\xi_1}{d\xi}\right)^2\eta_1^2+\xi_1^2\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\eta_1^2}\left(1-\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2\right) = \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{d\xi_1}{d\xi}\right)^2,$$

wo die eine Seite der Gleichung nur von ξ, die andere nur von η abhängt. Daher zerfällt sie in die beiden Gleichungen:

$$(33.)\qquad \frac{d\xi_1}{d\xi} = \varkappa\xi_1, \quad 1-\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 = \varkappa^2\eta_1^2,$$

wo $\varkappa$ eine Constante bezeichnet.

Berücksichtigt man noch, dass nach (3.) die Gleichung

$$\frac{d^2r}{d\xi^2}+\frac{d^2r}{d\eta^2} = 0,$$

also wegen (32.) die Gleichung

$$\eta_1\frac{d^2\xi_1}{d\xi^2}+\xi_1\frac{d^2\eta_1}{d\eta^2} = 0$$

bestehen soll, so erhält man die Werthe:

$$(34.)\qquad \xi_1 = e^{\varkappa\xi}, \quad \eta_1 = b_1\cos\varkappa\eta+b_2\sin\varkappa\eta,$$

wenn zwischen den Constanten b_1, b_2 und $\varkappa$ die Beziehung besteht:

$$(34^a.)\qquad 1 = (b_1^2+b_2^2)\varkappa^2.$$

Bestimmt man ferner aus dem Werthe, der sich aus (32.) für r ergiebt, nach (3.) x, so hat man:

$$(35.)\qquad r = e^{\varkappa\xi}(b_1\cos\varkappa\eta+b_2\sin\varkappa\eta), \quad x = e^{\varkappa\xi}(b_2\cos\varkappa\eta-b_1\sin\varkappa\eta)+\varepsilon,$$

wo ε eine beliebige Constante bezeichnet. Eliminirt man aus (35.) η, so erhält man in der xr-Ebene die Gleichung eines Kreises, dessen Radius von ξ abhängt; eliminirt man dagegen ξ, so ergiebt sich die Gleichung einer Geraden, deren Richtung von η abhängt. Lässt man die rx-Ebene sich um die x-Axe drehen, so beschreiben der Kreis und die Gerade für alle möglichen Werthe ξ und η Flächen, die mit den Meridianebenen die drei Schaaren orthogonaler Flächen einer Kugel darstellen.

Daraus geht hervor, dass die im vorigen Paragraphen gewonnenen Werthsysteme (30^a.) und (30^b.) nur allein für die Kugel gelten. Wir vergleichen dieselben mit den Lösungen, die sich früher für die transversalen Schwingungen der Kugel ergeben haben, und setzen dazu

$$\varkappa = b_1 = 1, \quad b_2 = \varepsilon = 0,$$

wodurch man aus (35.) erhält:

$$(35^a.) \qquad r = e^{\xi}\cos\eta, \quad x = -e^{\xi}\sin\eta;$$

ferner

$$(35^b.) \qquad \xi_1 = e^{\xi}, \quad \eta_1 = \cos\eta, \quad h = \frac{1}{e^{\xi}}\cdot$$

Dadurch geht die Gleichung (29.), wenn noch

$$e^{\xi} = \varrho$$

gesetzt wird, über in:

$$(35^c.) \qquad \frac{d^2F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{dF}{d\eta} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{\varrho^2\cos^2\eta}\right)F = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt für

$$F = \Re P_\nu^n,$$

wo $\Re$ und P_ν^n Functionen von ϱ resp. von η bezeichnen, in die Gleichungen:

$$(36.) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Re}{d\varrho^2} + \left(m^2 - \dfrac{n(n+1)}{\varrho^2}\right)\Re = 0, \\ \dfrac{1}{\cos\eta}\dfrac{d}{d\eta}\cos\eta\dfrac{dP_\nu^n}{d\eta} + \left(n(n+1) - \dfrac{\nu^2}{\cos^2\eta}\right)P_\nu^n = 0. \end{cases}$$

Die Werthsysteme (30^a.) und (30^b.) nehmen nun folgende Gestalt bei Benutzung der Gleichung für $\Re$ an:

$$(37^a.) \qquad \begin{cases} u_5 = \dfrac{n(n+1)}{m^2}\dfrac{\Re_1}{\varrho}P_\nu^n\Phi, \\ v_5 = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{d\Re_1}{d\varrho}\dfrac{dP_\nu^n}{d\eta}\Phi, \\ w_5 = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{d\Re_1}{d\varrho}P_\nu^n\dfrac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(37^b.)\qquad u_6 = 0,\quad v_6 = \Re_2 \frac{1}{\cos\eta} P_\nu^n \frac{d\Phi}{d\varphi},\quad w_6 = -\Re_2 \cos\eta \frac{dP_\nu^n}{d\eta}\Phi.$$

Diese Lösungen stimmen genau mit denjenigen überein, die ich im 88. Bd. dieses Journals S. 144 für die transversalen Schwingungen der Kugel abgeleitet habe, wenn $\Re$ in u_5, v_5, w_5 durch $\frac{m^2}{n(n+1)} R$ ersetzt wird, und wenn man bedenkt, dass nach den Ausdrücken (10.) für die Componenten, sowie nach S. 142 Bd. 88 die obigen Grössen u, v, w mit den dort eingeführten Grössen ξ_2, η_2, ζ_2 in der Beziehung stehen:

$$\frac{u}{\varrho} = \xi_2,\quad v = \eta_2,\quad w = \zeta_2.$$

Die Lösungen (37^a.) und (37^b.) sind keine neuen Lösungen, sondern sie gehen aus (25^c.) und (25^d.) hervor durch Transformation der letzteren in Kugelcoordinaten, wie man leicht aus folgenden Formeln erkennt

$$\frac{dxF}{dx} + r\frac{dF}{dr} = \frac{d\varrho F}{d\varrho},\quad -xF\frac{dr}{d\xi} + rF\frac{dr}{d\eta} = 0,$$

$$xF\frac{dr}{d\eta} + rF\frac{dr}{d\xi} = \varrho^2 F,\quad x\frac{dF}{dr} - r\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{d\eta}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (25^e.) für F, die durch Transformation in (35^c.) übergeht.

§ 10.

Oberflächenbedingungen.

Im Vorhergehenden haben wir die unbestimmte Integration für die Schwingungen eines Rotationskörpers allgemein durchgeführt. Die Ausdrücke für die Componenten einer elastischen Verrückung ergeben sich aus (10.) in der allgemeinsten Form, wenn darin für u, v, w eine Combination der erhaltenen Werthsysteme u_i, v_i, w_i eingesetzt wird. Wir fassen das Resultat unserer Untersuchung in den Satz zusammen:

Die Integration des Systems partieller Differentialgleichungen für die elastischen Schwingungen der Rotationskörper ist zurückgeführt auf die Lösung einer Gleichung, die in ebenen Coordinaten lautet

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} + a^2F = 0,$$

und in den allgemeinen Coordinaten ξ, η, φ des Rotationskörpers

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi} r\frac{dF}{d\xi} + \frac{1}{r}\frac{d}{d\eta} r\frac{dF}{d\eta} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\varphi^2} + a^2F = 0\ ^*),$$

*) Dieser Gleichung genügen die obigen Producte $F_i\Phi$.

wo r als Function von ξ und η durch die Gleichung (1.)

$$x+ir = f(\xi+i\eta)$$

gegeben ist.

Es bleibt noch übrig, auf die Bestimmung der willkürlichen Constanten durch die Oberflächenbedingungen einzugehen. Wir setzen dazu voraus, dass die Oberfläche des Rotationskörpers stetig sei, und dass die Schaaren orthogonaler Flächen ξ, η, φ durch bestimmte Festsetzung über die Function f in Gleichung (1.) so gewählt seien, dass die Begrenzungsfläche des Körpers einer der Schaaren, z. B. derjenigen mit dem Parameter ξ angehören möge. Dann sind die Constanten in den erhaltenen Lösungen so zu bestimmen, dass die elastischen Druckkräfte, welche auf ein Element der Oberfläche wirken, für zwei gegebene Werthe des Parameters ξ verschwinden. Denn nach einer früheren Bemerkung kann man bei Schwingungsproblemen die auf die Oberfläche wirkenden äusseren Kräfte allgemein gleich Null annehmen. Die Oberflächenbedingungen lauten daher

$$(38.)\quad \begin{cases} A = \lambda\theta+2\mu\left(h\dfrac{dR}{d\xi}-\dfrac{dh}{d\eta}R_1\right) = 0, \\ T_2 = \mu\left(\dfrac{dRh}{d\eta}+\dfrac{dR_1h}{d\xi}\right) = 0, \\ T_1 = \mu\left(hr\dfrac{d\frac{R_{11}}{r}}{d\xi}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{d\varphi}\right) = 0. \end{cases}$$

Diesen Oberflächenbedingungen kann durch die longitudinalen Theile der Componenten

$$R = -\frac{h}{l^2}\frac{d\sigma}{d\xi}L,\quad R_1 = -\frac{h}{l^2}\frac{d\sigma}{d\eta}L,\quad R_{11} = -\frac{1}{rl^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}L$$

und

$$\theta = \sigma L$$

(cf. 10.) für keinen Rotationskörper ausser für die Kugel genügt werden, da dazu, wie leicht einzusehen, die in σ enthaltenen Constanten nicht ausreichen. Die Kugel dagegen kann in rein longitudinale Schwingungen versetzt werden und zwar verschieben sich dabei die einzelnen Kugeltheilchen auf ihren Radien. Man hat nämlich nach (35^a.) und (35^b.) für die Kugel

$$r = e^\xi\cos\eta,\quad h = \frac{1}{e^\xi},$$

und setzt man

$$R_1 = R_{11} = 0$$

und lässt R nur von ξ abhängen, so gehen, weil auch h nur von ξ abhängt, was sonst nicht der Fall ist, die obigen Bedingungsgleichungen in die eine

$$\lambda\theta+2\mu h\frac{dR}{d\xi} = 0$$

über, der durch die Constanten in σ genügt werden kann.

Dagegen können die Oberflächenbedingungen durch die transversalen Theile allein, sowie durch Combinationen der longitudinalen und transversalen Theile erfüllt werden, wie ich dies für die Kugel a. a. O. näher durchgeführt habe. Auch für jeden andern Rotationskörper stehen der Bestimmung der Constanten keine principiellen Schwierigkeiten entgegen, sobald die Lösung der Gleichung

$$\Delta^2F+a^2F = 0$$

für den betreffenden Körper bekannt ist.

Nach Erfüllung der Oberflächenbedingungen bleiben die Constanten in Φ, L und M (cf. 25 und VIII) willkürlich; sie finden nach bekannter Methode ihre Bestimmung durch die Anfangsbedingungen.

§ 11.

Torsionsschwingungen.

Besonders einfach gestalten sich die Formeln für die Torsionsschwingungen. Man hat

$$R = R_1 = \frac{dR_{11}}{d\varphi} = 0$$

zu setzen. Dann folgt aus (10.)

$$(39.)\qquad rR_{11} = w \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\,mt$$

mit der Oberflächenbedingung (cf. 38.)

$$(39^a.)\qquad \frac{d\frac{w}{r^2}}{d\xi} = 0 \quad \text{für} \quad \xi = a \text{ und } \xi = b.$$

Den Werth für w könnte man den Lösungen (25.) entnehmen, wo Φ = const. zu setzen ist *); doch anstatt denselben in die Variablen ξ und η umzusetzen,

*) Man erhält aus (25^a.), (25^b.), (25^c.), (25^d.) für w die Werthe:

$$w_2 = r\frac{dF_2}{dr},\quad w_4 = rx\frac{dF_4}{dr} - r^2\frac{dF_4}{dx},$$

wo F_2 und F_4 Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2F}{dx^2}+m^2F = 0$$

ist es hier geeigneter, auf die ursprünglichen Gleichungen zurückzugehen. Man erhält aus (12.) und (12^a.), wo $u = v = \frac{dw}{d\varphi} = 0$ zu setzen ist, für w die Gleichung:

$$(40.) \qquad r\frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}\frac{dw}{d\xi}+r\frac{d}{d\eta}\frac{1}{r}\frac{dw}{d\eta}+\frac{m^2}{h^2}w = 0.$$

Die weitere Rechnung möge für das verlängerte Rotationsellipsoid durchgeführt werden. Für dasselbe nimmt Gleichung (1.) die Form an:

$$x+ir = \frac{c}{2}(e^{\xi+i\eta}+e^{\xi-i\eta}),$$

wo durch $2c$ der Abstand der Brennpunkte bezeichnet wird. Hieraus folgt:

$$(40^a.) \qquad \begin{cases} x = c\cos\eta\dfrac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2} = c\cos\eta\cos i\xi, \\ r = c\sin\eta\dfrac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2} = -ic\sin\eta\sin i\xi, \\ \dfrac{1}{h^2} = c^2(\sin^2\eta-\sin^2 i\xi). \end{cases}$$

Hierdurch geht (40.) über in

$$\sin i\xi\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sin i\xi}\frac{dw}{d\xi}+\sin\eta\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\sin\eta}\frac{dw}{d\eta}+m^2c^2(\sin^2\eta-\sin^2 i\xi)w = 0.$$

Setzt man nun

$$(41.) \qquad w = \Xi H,$$

wo Ξ, H Functionen von ξ resp. η bedeuten, so zerfällt die Gleichung für w in die Gleichungen mit der willkürlichen Constanten ϑ:

$$\sin i\xi\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sin i\xi}\frac{d\Xi}{d\xi}-(m^2c^2\sin^2 i\xi-\vartheta)\Xi = 0,$$

$$\sin\eta\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\sin\eta}\frac{dH}{d\eta}+(m^2c^2\sin^2\eta-\vartheta)H = 0;$$

und diese Gleichungen gehen beide über in eine Gleichung von der Form:

$$(42.) \qquad (1-\varrho^2)\frac{dF}{d\varrho^2}+(m^2c^2(1-\varrho^2)-\vartheta)F = 0,$$

---

sind. Beide Werthe w_3 und w_4 genügen der Gleichung (40.), wie man durch Transformation derselben in die Gleichung

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dx^2}+m^2w = 0$$

erkennt.

wenn gesetzt wird

$$\cos i\xi = y, \quad \cos\eta = z.$$

Die durch (42.) definirte Function F gehört zu den Cylinderfunctionen höherer Ordnung (cf. *Heine*, Kugelfunctionen II.).

Aus (39.) und (41.) erhält man für die Torsionscomponente:

$$(43.) \qquad R_{11} = \frac{1}{r}\Xi H \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\, mt;$$

die Constanten in Ξ sowie m sind durch die Gleichung, die aus (39^a.) hervorgeht:

$$\frac{d\frac{\Xi}{\sin^2 i\xi}}{d\xi} = 0 \quad \text{für} \quad \xi = a \text{ und } \xi = b,$$

die Constanten in H durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Die Knotenflächen sind orthogonale Flächen, die den Wurzeln der Gleichungen

$$\Xi = 0 \quad \text{und} \quad H = 0$$

entsprechen; sie sind einerseits Ellipsoide, die durch Rotation der Schaar confocaler Ellipsen (cf. 40^a.)

$$\frac{x^2}{c^2\left(\frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2}\right)^2} + \frac{r^2}{c^2\left(\frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2}\right)^2} = 1$$

entstehen; andererseits Hyperboloide, die der Schaar confocaler Hyperbeln

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\eta} - \frac{r^2}{c^2\sin^2\eta} = 1$$

entsprechen.

§ 12.

Gleichgewicht der elastischen Rotationskörper.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$(44.) \qquad \frac{R}{h} = U, \quad \frac{R_1}{h} = V, \quad rR_{11} = W$$

und setzen voraus, dass auf das Massenelement keine äusseren Kräfte wirken. Die Gleichungen (I.), (III.) und (IV.) gehen für

$$F = F_1 = F_{11} = 0,$$

$$\varrho = \xi, \quad \varrho_1 = \eta, \quad \varrho_{11} = \varphi; \quad h = h_1, \quad h_{11} = \frac{1}{r} \quad \text{(cf. (4.))}$$

in folgende Gleichungen über, die zur Bestimmung von U, V, W dienen:

$$(45.)\quad \frac{d\mathfrak{B}}{d\varphi}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\eta}=\omega^2 r\frac{d\theta}{d\xi},\quad \frac{d\mathfrak{C}}{d\xi}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\varphi}=\omega^2 r\frac{d\theta}{d\eta},\quad \frac{d\mathfrak{A}}{d\eta}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\xi}=\omega^2\frac{1}{rh^2}\frac{d\theta}{d\varphi};$$

$$(45^a.)\quad \frac{1}{r}\frac{drU}{d\xi}+\frac{1}{r}\frac{drV}{d\eta}+\frac{1}{r^2h^2}\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\theta}{h^2};$$

$$(45^b.)\quad r\mathfrak{A}=\frac{dV}{d\varphi}-\frac{dW}{d\eta},\quad r\mathfrak{B}=\frac{dW}{d\xi}-\frac{dU}{d\varphi},\quad \frac{1}{rh^2}\mathfrak{C}=\frac{dU}{d\eta}-\frac{dV}{d\xi}.$$

Zur Abkürzung ist gesetzt

$$(45^c.)\quad \omega^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}.$$

Wie früher, unterscheiden wir bei Integration dieser Gleichungen die beiden Fälle

$$\theta=0 \quad\text{und}\quad \theta \gtrless 0.$$

Ist $\theta=0$, so gehen die Gleichungen für das Gleichgewicht in die entsprechenden (12.) und (12^a.) für die Schwingungen über, wenn in (12.) und (12^a.) $m=0$ gesetzt wird. Die Werthe für U, V, W lassen sich daher direct aus den Lösungen (25^a.), (25^b.), (25^c.), (25^d.) ableiten. Dazu setzen wir in denselben

$$F_i = G_i m^2,$$

wo mit G_i eine Function bezeichnet wird, die derselben Differentialgleichung wie F_i genügt. Dann setzen wir $m=0$. Beachten wir noch den Satz: Ist F eine Lösung der Gleichung:

$$(46.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}F = 0,$$

so genügt dieser Gleichung auch die Function

$$\frac{dxF}{dx}+r\frac{dF}{dr};$$

dann werden die Lösungen, welche aus (25^a.) und (25^c.) hervorgehen, identisch. Daher ergeben sich folgende drei Werthsysteme U, V, W:

$$(47^a.)\quad U_1=\frac{dG_1}{d\xi}\Phi,\quad V_1=\frac{dG}{d\eta}\Phi,\quad W_1=G_1\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad \theta=0;$$

$$(47^b.)\quad U_2=\frac{G_2}{r}\frac{dr}{d\xi}\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad V_2=\frac{G_2}{r}\frac{dr}{d\eta}\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad W_2=-r\frac{dG_2}{dr}\Phi,\quad \theta=0;$$

$$(47^c.)\quad \begin{cases} U_3 = \left(-\frac{x}{r}G_3\frac{dr}{d\xi}+G_3\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},\\ V_3 = \left(-\frac{x}{r}G_3\frac{dr}{d\eta}-G_3\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},\\ W_3 = \left(rx\frac{dG_3}{dr}-r^2\frac{dG_3}{dx}\right)\Phi,\quad \theta=0.\end{cases}$$

Diese Werthsysteme genügen den Gleichungen (45.) und (45ᵃ.), wenn G_1, G_2, G_3 Lösungen der Gleichung (46.) sind, die in den Coordinaten ξ, η lautet:

$$(48.)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}r\frac{dF}{d\xi}+\frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}r\frac{dF}{d\eta}-\frac{\nu^2}{r^2h^2}F = 0.$$

Φ hat dieselbe Bedeutung wie oben (cf. (14.)).

§ 13.

Die Gleichungen (45.) und (45ᵃ.) sind ferner zu integriren für $\theta \gtrless 0$. Die Methode, die ich dabei befolge, ist die gleiche, wie die oben angewendete, um die Gleichungssysteme (12.) und (12ᵃ.) für die Schwingungen aufzulösen. Man hat zu setzen:

$$(49.)\qquad \begin{cases} U=\left(\frac{d\zeta}{d\xi}-Q\right)\Phi, \quad V=\left(\frac{d\zeta}{d\eta}+P\right)\Phi, \quad W=\zeta\frac{d\Phi}{d\varphi}; \\ \mathfrak{A}=\frac{P}{r}\frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad \mathfrak{B}=\frac{Q}{r}\frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad \mathfrak{C}=-S\Phi; \end{cases}$$

$$(49^a.)\qquad S = rh^2\left(\frac{dP}{d\xi}+\frac{dQ}{d\eta}\right),$$

wo ζ, P, Q Functionen von ξ und η bezeichnen. Hierdurch werden zunächst die Gleichungen (45ᵇ.) identisch erfüllt. Wir setzen ferner

$$(50.)\qquad \theta = \tau\Phi$$

und erhalten aus (45.) und (45ᵃ.) für θ eine Gleichung, die durch (50.) übergeht in:

$$(51.)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}r\frac{d\tau}{d\xi}+\frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}r\frac{d\tau}{d\eta}-\frac{\nu^2}{rh^2}\tau = 0;$$

und die Gleichungen (45.) und (45ᵃ.) ergeben zur Bestimmung von ζ, P, Q die Gleichungen:

$$(52.)\qquad \begin{cases} -\frac{\nu^2}{r^2}Q+\frac{1}{r}\frac{dS}{d\eta} = \omega^2\frac{d\tau}{d\xi}, \\ -\frac{\nu^2}{r^2}P+\frac{1}{r}\frac{dS}{d\xi} = -\omega^2\frac{d\tau}{d\eta}, \\ \frac{d\frac{P}{r}}{d\eta}-\frac{d\frac{Q}{r}}{d\xi} = \frac{\omega^2\nu}{rh^2}\tau; \end{cases}$$

$$(52^a.)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}r\frac{d\zeta}{d\xi}+\frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}r\frac{d\zeta}{d\eta}-\frac{\nu^2}{r^2h^2}\zeta = \frac{1}{r}\frac{drQ}{d\xi}-\frac{1}{r}\frac{drP}{d\eta}+\frac{\tau}{h^2}.$$

Um dies System partieller Differentialgleichungen auf ein System gewöhn-

licher Differentialgleichungen überzuführen, setzen wir, ähnlich wie früher:

$$(53.)\quad P = s_1\frac{dr}{d\xi}+s_2\frac{dr}{d\eta},\quad Q = s_1\frac{dr}{d\eta}-s_2\frac{dr}{d\xi}.$$

Dann gehen die Gleichungen (52.), (51.) und (52^a.) durch Transformation in die Coordinaten r, x, φ (cf. § 6) in folgende über:

$$(54.)\quad \begin{cases} -\frac{\nu^2}{r^2}s_1+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds_1}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2rs_2}{dr\,dx} = \omega^2\frac{d\tau}{dx}, \\ -\frac{\nu^2}{r^2}s_2+\frac{d^2s_1}{dr\,dx}+\frac{d^2s_2}{dx^2} = -\omega^2\frac{d\tau}{dr}, \\ \frac{ds_1}{dx}-r\frac{d\frac{s_2}{r}}{dr} = -\omega^2\tau; \end{cases}$$

$$(54^a.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\tau}{dr}+\frac{d^2\tau}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\tau = 0;$$

$$(54^b.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\zeta}{dr}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\zeta = \frac{ds_1}{dx}-\frac{1}{r}\frac{drs_2}{dr}+\tau.$$

Trägt man den Werth für τ aus der dritten Gleichung (54.) in die ersten beiden ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(55.)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds_1}{dr}+\frac{d^2s_1}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}s_1 = -2\frac{d\frac{s_2}{r}}{dx}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds_2}{dr}+\frac{d^2s_2}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}s_2 = 0. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man, dass man bei Integration der Gleichungen (54.) die beiden Fälle zu unterscheiden hat:

$$s_2 = 0 \quad\text{und}\quad s_2 \lesseqgtr 0.$$

Setzt man daher

$$s_1 = s_1'+s_1'',\quad \tau = \tau'+\tau'',\quad \zeta = \zeta'+\zeta'',$$

so wird man als Lösungen der Gleichungen (54.), (54^a.) und (54^b.) erhalten

$$1)\quad s_1 = s_1',\quad \tau = \tau',\quad \zeta = \zeta',\quad s_2 = 0,$$

$$2)\quad s_1 = s_1'',\quad \tau = \tau'',\quad \zeta = \zeta'',\quad s_2 \lesseqgtr 0.$$

Wir lassen bei Bestimmung dieser Werthsysteme im Folgenden die oberen Indices weg. Es sei zunächst

$$s_2 = 0.$$

Die Gleichungen (54.) und (54^a.) werden erfüllt durch:

$$\tau = -\frac{1}{\omega^2}\frac{dG_4}{dx},$$

$$s_1 = G_4,$$

wenn G_4 der Gleichung (54^a.) genügt. Die Gleichung (54^b.) geht dadurch über in:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\zeta}{dr}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\zeta = \frac{\omega^2-1}{\omega^2}\frac{dG_4}{dx}.$$

Hieraus erhält man bei Vernachlässigung eines Werthes für ζ, welcher von G_4 unabhängig ist:

$$\zeta = \frac{\omega^2-1}{2\omega^2}xG_4.$$

Aus (49.) ergiebt sich nun mit Rücksicht auf (53.) als vierte Lösung der Gleichungen (45.) und (45^a.):

$$(56.)\quad \begin{cases} U_4 = \left(\frac{\omega^2-1}{2\omega^2}\frac{dxG_4}{d\xi}-G_4\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \quad V_4 = \left(\frac{\omega^2-1}{2\omega^2}\frac{dxG_4}{d\eta}+G_4\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ W_4 = \frac{\omega^2-1}{2\omega^2}xG_4\frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad \theta = -\frac{1}{\omega^2}\frac{dG_4}{dx}\Phi. \end{cases}$$

Es sei ferner

$$s_2 \lesseqgtr 0.$$

Die Gleichungen (55.) zeigen, dass den Gleichungen (54.) und (54^a.) genügt wird durch:

$$(57.)\quad s_1 = -xG_5, \quad s_2 = rG_5, \quad \tau = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{dxG_5}{dx}+r\frac{dG_5}{dr}\right),$$

wenn mit G_5 eine Lösung der Gleichung (54^a.) bezeichnet wird. Einmal werden hierdurch die Gleichungen (55.) identisch erfüllt; dann genügt der Werth für τ der Gleichung (54^a.) nach einer Bemerkung im vorigen Paragraphen.

Die Gleichung (54^b.) nimmt durch (57.) die Form an:

$$(57^a.)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\zeta}{dr}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\zeta = \frac{1-\omega^2}{\omega^2}\left(\frac{dxG_5}{dx}+r\frac{dG_5}{dr}\right)-2G_5.$$

Das von G_5 abhängige Integral dieser Gleichung ist

$$(58.)\quad \zeta = x\int\left\{\frac{1-\omega^2}{2\omega^2}\left(\frac{dxG_5}{dx}+r\frac{dG_5}{dr}\right)-G_5\right\}dx\ ^*),$$

wo die Integrationsconstante $=0$ gesetzt werden kann.

---

*) Ersetzt man G_5 durch

$$G_5 = \frac{dF}{dx},$$

was gestattet ist, wenn F derselben Gleichung wie G_5 genügt, so erhält ζ den Werth:

$$\zeta = \frac{1-\omega^2}{2\omega^2}\left(x^2\frac{dF}{dx}+rx\frac{dF}{dr}\right)-xF.$$

Aus (49.) folgt nun als fünftes Werthsystem U, V, W:

$$(59.)\quad \begin{cases} U_5 = \left(\frac{d\zeta}{d\xi} + \left(x\frac{dr}{d\eta} + r\frac{dr}{d\xi}\right)G_5\right)\Phi, \quad V_5 = \frac{d\zeta}{d\eta} - \left(x\frac{dr}{d\xi} - r\frac{dr}{d\eta}\right)G_5\right)\Phi, \\ W_5 = \zeta\frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad \theta = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{dxG_5}{dx} + r\frac{dG_5}{dr}\right)\Phi, \end{cases}$$

wo für ζ der Werth (58.) zu setzen ist, und G_5 in den Coordinaten ξ und η der Gleichung (48.) genügt.

Die erhaltenen Werthsysteme U_i, V_i, W_i (47^a.), (47^b.), (47^c.), (56.) und (59.) sind mit einander combinirt in (44.) einzutragen, also ist zu setzen

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5, \\ V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5, \\ W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5. \end{aligned}$$

Die allgemeinsten Ausdrücke für die Componenten werden dann durch dreifache Summation gewonnen. Die Bestimmung der willkürlichen Constanten in den Functionen G_i und Φ durch die Oberflächenbedingungen ist ausführbar, sobald die Lösung der Potentialgleichung, auf welche die Integration der Gleichungen für das Gleichgewicht eines Rotationskörpers zurückgeführt wurde, bekannt ist.

Es möge noch besonders bemerkt werden, dass man nach einem Satze in § 12 in den erhaltenen fünf Werthsystemen jede Function G durch $\frac{dxG}{dx} + r\frac{dG}{dr}$ ersetzen kann, wodurch man fünf neue Werthsysteme U, V, W erhält.

§ 14.

Die *Lamé*schen Lösungen für das Gleichgewicht der Kugel.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass die erhaltenen Lösungen für das Gleichgewicht eines Rotationskörpers, auf die Kugel angewendet, die bekannten *Lamé*schen Lösungen ergeben, und zwar werden dieselben aus (47^a.), (47^c.) und (59.) gewonnen, während die obigen Werthsysteme (47^b.) und (56.) in neue Lösungen für die Kugel übergehen, die sich *Lamé* nicht ergeben haben und nach seiner Methode der Integration der Elasticitätsgleichungen nicht ergeben konnten.

Für die Kugel hat man nach (35^a.) und (35^b.):

$$r = \varrho\cos\eta, \quad x = -\varrho\sin\eta, \quad h = \frac{1}{\varrho}, \quad \varrho = e^\xi;$$

hieraus

$$\frac{dr}{d\xi} = \varrho\cos\eta, \quad \frac{dr}{d\eta} = -\varrho\sin\eta;$$

$$\frac{d\xi}{dr} = -\frac{d\eta}{dx} = \frac{\cos\eta}{\varrho}, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dr} = -\frac{\sin\eta}{\varrho}.$$

Es ergeben zunächst die Lösungen (47^a.) und (47^c.) folgende Ausdrücke für die Componenten mit Rücksicht auf (44.):

$$(60^a.)\qquad R = \frac{dG_1}{d\varrho}\Phi, \quad R_1 = \frac{1}{\varrho}\frac{dG_1}{d\eta}\Phi, \quad R_{11} = \frac{1}{\varrho\cos\eta}G_1\frac{d\Phi}{d\varphi};$$

$$(60^b.)\qquad R = 0, \quad R_1 = -\frac{1}{\cos\eta}G_3\frac{d\Phi}{d\varphi}, \quad R_{11} = \frac{dG_3}{d\eta}\Phi;$$

G_i genügt der Gleichung:

$$(61.)\qquad \frac{d}{d\varrho}\varrho^2\frac{dG}{d\varrho} + \frac{1}{\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{dG}{d\eta} - \frac{\nu^2}{\cos^2\eta}G = 0$$

und daher

$$G_i = (A_i\varrho^n + B_i\varrho^{-n-1})S_\nu^n,$$

wo mit A_i und B_i Constante und mit S_ν^n die Lösung der Gleichung für die Zugeordneten der Kugelfunctionen (*Heine* Kugelfunctionen) bezeichnet werden.

Um das dem Werthsystem (59.) entsprechende zu bilden, scheint es einfacher, anstatt den Ausdruck (58.) für ζ zu transformiren, auf die Gleichung (57^a.) zurückzugehen. Diese erhält durch Transformation die einfachere Form:

$$\frac{d}{d\varrho}\varrho^2\frac{d\zeta}{d\varrho} + \frac{1}{\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{d\zeta}{d\eta} - \frac{\nu^2}{\cos^2\eta}\zeta = \frac{1-\omega^2}{\omega^2}\varrho^2\frac{d\varrho G_5}{d\varrho} - 2\varrho^2 G_5,$$

während sich für θ aus (59.) ergiebt

$$\theta = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\varrho G_5}{d\varrho}.$$

G_5 genügt der Gleichung (61.). Daher kann man setzen

$$G_5 = \left(\frac{\omega^2}{n+1}a_1\varrho^n - \frac{\omega^2}{n}a_2\varrho^{-n-1}\right)S_\nu^n$$

mit den willkürlichen Constanten a_1, a_2. Hierdurch wird

$$\theta = (a_1\varrho^n + a_2\varrho^{-n-1})S_\nu^n,$$

und die linke Seite der Gleichung für ζ

$$\left(\frac{(n+1)(1-\omega^2)-2\omega^2}{n+1}a_1\varrho^{n+2} + \frac{n(1-\omega^2)+2\omega^2}{n}a_2\varrho^{-n+1}\right)S_\nu^n;$$

man hat daher zu setzen

$$\zeta = (b_1\varrho^{n+2} + b_2\varrho^{-n+1})S_\nu^n,$$

und weil S_ν^n der Gleichung

$$\frac{1}{\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{dS_\nu^n}{d\eta}+\left(n(n+1)-\frac{\nu^2}{\cos^2\eta}\right)S_\nu^n = 0$$

genügt, so wird die Gleichung für ζ erfüllt, wenn die Constanten b_1, b_2 die Werthe erhalten:

$$b_1 = \frac{(n+1)(1-\omega^2)-2\omega^2}{2(n+1)(2n+3)}a_1,\quad b_2 = -\frac{n(1-\omega^2)+2\omega^2}{2n(2n-1)}a_2.$$

Ferner hat man

$$x\frac{dr}{d\eta}+r\frac{dr}{d\xi} = \varrho^2,\quad x\frac{dr}{d\xi}-r\frac{dr}{d\eta} = 0.$$

Daher erhält man aus (59.) mit Rücksicht auf (44.) für die Componenten und θ:

$$(61.)\quad \begin{cases} R = (c_1\varrho^{n+1}+c_2\varrho^{-n})S_\nu^n\Phi, & R_1 = (b_1\varrho^{n+1}+b_2\varrho^{-n})\dfrac{dS_\nu^n}{d\eta}\Phi, \\ R_{11} = (b_1\varrho^{n+1}+b_2\varrho^{-n})\dfrac{S_\nu^n}{\cos\eta}\dfrac{d\Phi}{d\varphi}, & \theta = (a_1\varrho^n+a_2\varrho^{-n-1})S_\nu^n\Phi, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$c_1 = b_1(n+2)+\frac{\omega^2}{n+1}a_1 = \frac{(n+2)(1-\omega^2)+2\omega^2}{2(2n+3)}a_1,$$

$$c_2 = -b_2(n-1)-\frac{\omega^2}{n}a_2 = \frac{(n-1)(1-\omega^2)-2\omega^2}{2(2n-1)}a_2.$$

Die Lösungen (60[a].), (60[b].) und (61.) gehen in die *Lamé*schen über, wenn man ϱ durch r, η durch φ, φ durch ψ, S_ν^n durch P, ω^2 nach (45[c].) durch $\frac{\lambda+2\mu}{\mu}$, $1-\omega^2$ durch $-\frac{\lambda+\mu}{\mu}$ ersetzt und für a_1, a_2 zwei Constanten A, B einführt, nämlich

$$a_1 = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A,\quad a_2 = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}B.$$

Hamburg, den 20. März 1886.

Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. I.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Gleichwie sich Punkte, Strahlen und Ebenen zu den sechs Grundgebilden, d. h. zu Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln, ebenen Feldern, Bündeln und räumlichen Systemen vereinigen lassen, ebenso können gleichartige projective Grundgebilde zu unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten verschiedener Stufen zusammengefasst werden. Eine derartige n-fach unendliche Mannigfaltigkeit $|M_n|$ ist durch beliebige $n+1$ ihrer projectiven Gebilde bestimmt, ähnlich wie eine Gerade durch zwei und eine Ebene durch drei ihrer Punkte; das Erzeugniss von je $n+1$ ihrer Grundgebilde ist allemal das nämliche. Sie enthält alle linearen Mannigfaltigkeiten $|M_1|$, $|M_2|$, ..., $|M_{n-1}|$, welche durch je zwei, drei, ..., n ihrer Gebilde bestimmt sind, und beliebige i ihrer Mannigfaltigkeiten $|M_{n-1}|$ haben i. A. eine $(n-i)$-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit $|M_{n-i}|$ mit einander gemein.

Schon bei den ersten Untersuchungen über die projective Erzeugung von Kegelschnitten, Regelschaaren und anderen Elementargebilden begegnen wir diesen Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde. So bilden die projectiven Strahlenbüschel, welche paarweise einen gegebenen Kegelschnitt erzeugen, eine einfach unendliche, durch je zwei von ihnen bestimmte Mannigfaltigkeit $|M_1|$; ebenso die ∞^1 projectiven Punktreihen oder Ebenenbüschel, die irgend eine Regelschaar erzeugen.

Nun ist sehr merkwürdig, dass die linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde i. A. paarweise auftreten. Die beiden Mannigfaltigkeiten eines solchen Paares sind auf das innigste verbunden und bedingen sich wechselseitig, sodass jede von ihnen als „Träger“ oder „Stütze“ der anderen aufzufassen ist. Sie erzeugen beide im Wesentlichen das nämliche Gebilde, wenn auch auf verschiedene Art; sie können, wenn sie gleichartig

sind, unter Umständen zusammenfallen. Ein Beispiel von zwei so zusammengehörigen Mannigfaltigkeiten bieten die beiden Schaaren projectiver Punktreihen, welche ein gegebenes einschaliges Hyperboloid erzeugen. — Obwohl zwei solche „sich stützende" Mannigfaltigkeiten verschiedenartig und von ungleicher Mächtigkeit sein können, so ist doch ihre gegenseitige Abhängigkeit mit derjenigen eines Strahlen- und eines Ebenenbündels vergleichbar, die denselben Mittelpunkt haben; wenigstens insofern, als beide Bündel durch drei Ebenen des letzteren oder aber durch drei Strahlen des ersteren völlig bestimmt sind.

Mit dem systematischen Aufbau solcher sich stützender Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde und der Erörterung ihrer gegenseitigen Beziehungen betreten wir ein fruchtbares, noch wenig angebautes Forschungsgebiet. Allerdings gehören meine früheren Untersuchungen *) über kubische Raumcurven und Flächen, tetraedrale Strahlencomplexe und Büschel collinearer Räume, sowie diejenigen des Herrn *Friedrich Schur* **) über Netze und Gebüsche collinearer Felder, Bündel und Räume grossentheils zu diesem Gebiete; doch bilden sie nur einen Theil desselben und lassen sich nunmehr in einem sehr einfachen Zusammenhange darstellen. Auf die Theorie jener linearen Mannigfaltigkeiten führen wir diejenige ihrer complicirteren Erzeugnisse zweiter, dritter und höherer Ordnung unmittelbar zurück.

Auf dem Titelblatt seines leider unvollendeten, bahnbrechenden Hauptwerkes hat *Jacob Steiner* die „systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" sich zur Aufgabe gestellt. Nun sind aber die Gebilde einer linearen Mannigfaltigkeit in einer besonders innigen und übersichtlichen Weise von einander abhängig; man denke nur beispielsweise an die wechselseitige Abhängigkeit der Punkte und Geraden einer Ebene oder der Strahlen und Ebenen eines Bündels. Die Zusammenfassung projectiver Grundgebilde zu linearen Mannigfaltigkeiten dürfte deshalb schon an sich und abgesehen von den höheren Gebilden, die sie erzeugen, als ein weiterer Schritt nach dem hohen Ziele sich darstellen, welches der grosse Synthetiker mit jenen Worten der geometrischen Forschung gesteckt hat.

---

*) Vgl. meine „Geometrie der Lage" II. und dieses Journal Bd. 74, S. 1.
**) S. dessen Habilitationsschrift, Math. Annalen, Bd. 18, S. 1.

1. Die projective Beziehung zweier Ebenenbüschel, deren Axen u, u_1 gegeben sind, hängt von drei Parametern ab oder kann auf ∞^3 Arten festgestellt werden; und da u_1 im Raume ∞^4 Lagen annehmen kann, so giebt es zu einem Ebenenbüschel ∞^7 projective Ebenenbüschel. Die collineare Verwandtschaft von zwei Bündeln, deren Mittelpunkte S, S_1 gegeben sind, hängt von acht Parametern ab, und zudem kann S_1 im Raume ∞^3 Lagen annehmen; zu dem Bündel S giebt es deshalb ∞^{11} collineare Bündel. Ebenso können zu einem Raume ∞^{15} collineare Räume construirt werden, denn die Collineation zweier Räume Σ, Σ_1 hängt von 15 Parametern ab.

In der Gesammtheit $|u_7|$ der projectiven Ebenenbüschel werden wir lineare Mannigfaltigkeiten $|u_1|$, $|u_2|$, ..., $|u_6|$ von 1, 2, ..., 6 Dimensionen unterscheiden lernen und ihre merkwürdigsten Eigenschaften näher untersuchen. Ebenso können wir in der Gesammtheit $|S_{11}|$ der collinearen Bündel unendlich viele lineare Mannigfaltigkeiten $|S_1|$, $|S_2|$, ..., $|S_{10}|$ erster bis zehnter Stufe aufstellen; und in der Gesammtheit $|\Sigma_{15}|$ der collinearen Räume giebt es lineare Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$, ..., $|\Sigma_{14}|$ von 1, 2, ..., 14 Dimensionen.

Der Erörterung dieser verschiedenartigen Mannigfaltigkeiten, denen sich noch andere anreihen werden, schicke ich folgende Bemerkung voraus:

> „Von zwei unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde sage ich, sie *tragen* oder *stützen sich* oder *ruhen auf einander*, wenn die Grundgebilde einer jeden von ihnen aus homologen Elementen der Grundgebilde der anderen bestehen."

Jede der beiden sich stützenden Mannigfaltigkeiten*) ist hiernach auf die Grundgebilde der anderen eindeutig oder, wie wir sagen dürfen, *projectiv* bezogen, indem ihre Gebilde mit einem beliebigen Grundgebilde dieser anderen Mannigfaltigkeit je ein ihnen entsprechendes Element gemein haben.

§ 1.

Schaaren $|u_1|$ projectiver Ebenenbüschel.

2. Die beiden Regelschaaren einer Regelfläche F^2 zweiter Ordnung werden durch je eine „Schaar" von ∞^1 projectiven Ebenenbüscheln erzeugt, deren Axen die jeweilig andere Regelschaar bilden. Diese beiden Schaaren

---

*) Herr *Schur* nennt dieselben gelegentlich „conjugirt".

projectiver Ebenenbüschel stützen sich; denn die Büschel einer jeden von ihnen bestehen aus homologen Ebenen der ∞^1 Büschel der anderen. Durch zwei projective Ebenenbüschel u, u_1 sind zwei sich stützende Büschelschaaren bestimmt, von denen die eine, (uu_1) oder $|u_1|$, jene beiden Büschel verbindet. Dieselben Schaaren sind durch je zwei ihrer projectiven Büschel bestimmt. Sie hängen i. A. von neun Parametern ab, wie die von ihnen erzeugte „Ordnungsfläche" F^2, der Ort ihrer Axen.

3. Wenn die Axen von u und u_1 sich schneiden, so wird die Ordnungsfläche F^2 i. A. ein Kegel zweiter Ordnung, die beiden Schaaren fallen zusammen und hängen von acht Parametern ab. Haben jedoch u und u_1 eine Ebene φ entsprechend gemein und damit perspective Lage, so bilden die Axen der beiden Schaaren zwei concentrische Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen φ und ψ, und F^2 zerfällt in φ und ψ. Von diesen beiden Schaaren perspectiver Ebenenbüschel, welche von sieben Parametern abhängen, reducirt sich je ein Büschel auf eine der Ebenen φ, ψ, seine Axe wird eine unbestimmte Gerade der Ebene und seine projective Beziehung zu den übrigen Ebenenbüscheln der betreffenden Schaar ist eine ausgeartete.

Wenn u und u_1 dieselbe Axe haben, so fallen die beiden Schaaren zusammen und bestehen aus coaxialen Büscheln, welche i. A. zwei Ebenen entsprechend gemein haben. Sie heissen in diesem Falle „singuläre" Schaaren und hängen von sechs Parametern ab. Je zwei ihrer Büschel reduciren sich auf jene beiden „Doppel-Ebenen".

§ 2.

Die lineare Congruenz $|u_2|$ projectiver Ebenenbüschel und die Reihe $|S_1|$ collinearer Bündel.

4. Andere sich stützende lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde sind durch drei oder mehr projective Ebenenbüschel oder durch zwei oder mehr collineare Bündel oder Räume bestimmt. Drei projective Ebenenbüschel u, u_1, u_2, die nicht derselben Schaar angehören, bestimmen eine sie enthaltende „lineare Congruenz" (uu_1u_2) oder $|u_2|$ projectiver Ebenenbüschel. Zu derselben rechnen wir die Schaar (uu_1) oder $|u_1|$, sowie die ∞^2 Büschel der ∞^1 Schaaren, welche u_2 mit den ∞^1 Büscheln von $|u_1|$ bestimmt.

Die ∞^2 Büschel dieser Congruenz $|u_2|$ erzeugen zu dreien alle dieselbe kubische Raumcurve c^3, wie u, u_1 und u_2; denn ihre homologen

Ebenen schneiden sich in je einem Punkte S von c^3 (vgl. 2., 4.) und bilden ∞^1 Ebenenbündel S. Jeder Büschel von $|u_2|$ erzeugt mit den übrigen Büscheln ∞^1 Flächen zweiter Ordnung, welche in c^3 und der Axe jenes Büschels sich schneiden; daraus folgt, dass die Axen der ∞^2 Büschel von $|u_2|$ Sehnen von c^3 sind. Nun wird aber die Sehnencongruenz einer kubischen Raumcurve c^3 aus den Punkten S, S_1, S_2, ... dieser Curve durch *collineare* Ebenenbündel projicirt*); die homologen Ebenen der ∞^2 Büschel von $|u_2|$ bilden also eine „Reihe" (SS_1) oder $|S_1|$ von ∞^1 collinearen Bündeln S, S_1, ...**). Durch je zwei dieser Bündel wird die Sehnencongruenz erster Ordnung dritter Klasse von c^3 und zugleich diese Raumcurve erzeugt; durch sie ist also auch die Büschelcongruenz $|u_2|$ völlig bestimmt.

Wir nennen c^3 die „Ordnungscurve" der Congruenz $|u_2|$ und der Bündelreihe $|S_1|$. Sie enthält die Mittelpunkte aller Bündel von $|S_1|$ und wird aus ihren Sehnen durch die projectiven Ebenenbüschel von $|u_2|$ projicirt.

5. Die lineare Congruenz $|u_2|$ der ∞^2 projectiven Ebenenbüschel und die Reihe $|S_1|$ der ∞^1 collinearen Bündel ruhen auf einander; denn diese Bündel bestehen aus homologen Ebenen jener Büschel und umgekehrt letztere aus homologen Ebenen der ersteren. Durch diese Ebenen ist die Congruenz auf jeden Bündel der Reihe und ebenso die Reihe auf jeden Büschel der Congruenz projectiv bezogen (1.). Beide Mannigfaltigkeiten sind nebst ihrer kubischen Ordnungscurve c^3 ebensowohl durch irgend zwei collineare Bündel der Reihe $|S_1|$ wie durch beliebige drei projective Büschel der Congruenz $|u_2|$ bestimmt, und hängen demgemäss ebenso wie c^3 i. A. von zwölf Parametern ab.

Den ∞^2 Ebenenbüscheln eines beliebigen Bündels von $|S_1|$ entsprechen ∞^2 Büschelschaaren $|u_1|$ der Congruenz $|u_2|$. Letztere enthält demgemäss jede durch zwei ihrer Büschel bestimmte Schaar, und je zwei ihrer ∞^2 Schaaren haben allemal einen Büschel gemein. In der Ordnungscurve c^3 schneiden sich die ∞^2 Ordnungsflächen F^2 der Büschelschaaren von $|u_2|$ (4.). Durch jeden Punkt S von c^3 gehen ∞^1 Axen von $|u_2|$ und ∞^1 homologe Strahlen der Bündel von $|S_1|$; dieselben liegen auf einem

---

*) Vgl. meine „Geometrie der Lage" II., 2. Aufl. S. 90 und dieses Journal, Bd. 74, S. 4.

**) Herr *Schur* nennt a. a. O. diese Mannigfaltigkeit einen „Büschel" collinearer Ebenenbündel. Ich ziehe den Namen „Reihe" schon deshalb vor, weil die Mittelpunkte der Bündel eine kubische Punktreihe bilden; aus ähnlichen Gründen sage ich „Congruenz" anstatt „Netz" projectiver Büschel.

Kegel zweiter Ordnung, welcher c^3 aus S projicirt, durch homologe Ebenenbüschel dieser Bündel erzeugt wird und zu den Ordnungsflächen F^2 gehört.

6. Die *Specialfälle* von $|u_2|$ und $|S_1|$ sind für die nachfolgenden linearen Mannigfaltigkeiten von besonderer Wichtigkeit. Wenn von den projectiven Ebenenbüscheln u, u_1, u_2 drei homologe Ebenen in einer Geraden g sich schneiden, so zerfällt die Ordnungscurve c^3 in g und einen Kegelschnitt c^2, welcher mit g einen Punkt S_0 gemein hat. Zugleich bilden die Axen der Congruenz $|u_2|$ eine Strahlencongruenz erster Ordnung zweiter Klasse, indem sie die Punkte von g mit denen von c^2 verbinden. Aus ihnen wird c^2 durch die projectiven Büschel von $|u_2|$ projicirt, indessen sie selbst aus den Punkten von c^2 durch die collinearen Bündel der Reihe $|S_1|$ projicirt werden*). Diese Bündel haben die Ebene φ von c^2 entsprechend gemein; nach jedem Punkte von c^2 und g senden sie homologe Strahlen, und einer S_0 von ihnen reducirt sich auf den Ebenenbüschel g. Einer beliebigen Ebene ε von g entsprechen in jedem der übrigen Bündel von $|S_1|$ ∞^1 Ebenen; dieselben schneiden ε in einem Punkte von c.

Zwei collineare Bündel bestimmen eine solche specielle Reihe, wenn sie eine Ebene φ entsprechend gemein haben. Ihre in φ liegenden homologen Strahlenbüschel erzeugen den Kegelschnitt c^2; und je zwei homologe Ebenenbüschel, deren Axen in φ liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel, dessen Ebene durch g geht. Ein Büschel von $|u_2|$ reducirt sich auf die Ebene φ. In diesem Specialfalle hängen $|u_2|$ und $|S_1|$ von elf Parametern ab.

6*a*. Schneiden sich die homologen Ebenen von u, u_1 und u_2 in je einem Punkte einer Geraden v, so enthält diese die Mittelpunkte der collinearen Bündel von $|S_1|$. Die Ordnungscurve c^3 zerfällt alsdann in v und zwei mit v incidente, reelle oder conjugirt-imaginäre Gerade g, h, welche auch sich vereinigen können; die ∞^2 Axen von $|u_2|$ aber schneiden g und h und bilden demnach eine lineare Strahlen-Congruenz; aus ihnen wird die Punktreihe v durch die projectiven Büschel von $|u_2|$ projicirt. Die Bündel von $|S_1|$ haben die Gerade v sowie die Ebenen vg und vh entsprechend gemein; zwei von ihnen arten aus in die Ebenenbüschel g und h. Auf die Ebenen vg und vh reduciren sich zwei Büschel von $|u_2|$, und die Gerade v ist Axe einer singulären Schaar von $|u_2|$. Die Congruenz $|u_2|$ ist durch diese Schaar v und einen ihrer übrigen Büschel bestimmt, und hängt von 10 Parametern ab.

---

*) Vgl. meine „Geometrie der Lage“ II., 2. Aufl. S. 86.

6*b*. Wenn die drei Axen von u, u_1 und u_2 durch einen Punkt D gehen, so bilden die Axen der Congruenz $|u_2|$ den Strahlenbündel D, die Reihe $|S_1|$ aber besteht aus ∞^1 collinearen, mit D concentrischen Bündeln. Die ∞^2 Ordnungsflächen F^2 sind Kegel mit dem Centrum D, und die Ordnungscurve c^3, in welcher sie sich begegnen, zerfällt in drei Strahlen d von D, von denen zwei imaginär sein können. In jedem dieser Strahlen d schneiden sich homologe Ebenen von u, u_1, u_2 und allen übrigen Büscheln der Congruenz $|u_2|$; drei Bündel der Reihe $|S_1|$ reduciren sich folglich auf Ebenenbüschel mit den Axen d. Jeder der drei Strahlen d ist Axe einer singulären Büschelschaar von $|u_2|$ und einer darauf ruhenden Schaar homologer Ebenenbüschel der ∞^1 Bündel von $|S_1|$ (vgl. 3.). Die collinearen Bündel der Reihe $|S_1|$ haben demnach die drei „Ordnungsstrahlen" d und deren drei Verbindungsebenen entsprechend gemein; auf diese drei Ebenen reduciren sich drei Büschel von $|u_2|$. In diesem Specialfalle hängen $|u_2|$ und $|S_1|$ von neun Parametern ab. — Wenn jedoch die Büschel von $|u_2|$ zu einem Strahlenbüschel von D perspectiv liegen, so hängen $|u_2|$ und $|S_1|$ nur von dessen fünf Parametern ab; zugleich reduciren sich die ∞^1 Bündel von $|S_1|$ auf Ebenenbüschel, deren Axen den Strahlenbüschel bilden.

6*c*. Die Reihe $|S_1|$ besteht, wenn u, u_1 und u_2 eine Ebene φ entsprechend gemein haben, aus perspectiven Bündeln mit der Collineationsebene φ; zugleich wird φ der Ort der Axen aller Büschel von $|u_2|$. Die Büschel von $|u_2|$ erzeugen nämlich paarweise Strahlenbüschel (3.) und folglich zu dreien eine Gerade w, den Ort der Mittelpunkte jener perspectiven Bündel; sie liegen alle zu w perspectiv und haben die Ebene φ entprechend gemein. Ein Bündel von $|S_1|$ reducirt sich auf die Ebene φ; auf jede Ebene von w reducirt sich ein Büschel der Congruenz $|u_2|$, welche von sieben Parametern abhängt.

6*d*. Haben die Büschel u, u_1, u_2 dieselbe Axe a, so besteht die Congruenz $|u_2|$ aus coaxialen Büscheln, und möge eine „singuläre" Congruenz heissen; die Bündel der Reihe $|S_1|$ aber reduciren sich alle auf Ebenenbüschel mit der Axe a und enthalten die Ebenen von a je ∞^1 mal.

§ 3.

Der lineare Complex $|u_3|$ projectiver Ebenenbüschel und der Büschel $|\Sigma_1|$ collinearer Räume.

7. Vier projective Ebenenbüschel u, u_1, u_2, u_3, die nicht derselben linearen Congruenz angehören, bestimmen einen sie enthaltenden „linearen

Complex" $(uu_1u_2u_3)$ oder $|u_3|$ projectiver Ebenenbüschel. Zu demselben rechnen wir die lineare Congruenz (uu_1u_2) oder $|u_2|$, sowie die ∞^3 Büschel der ∞^2 Schaaren, welche u_3 mit den ∞ Büscheln von $|u_2|$ bestimmt. Der Complex $|u_3|$ enthält auch die ∞^2 linearen Congruenzen, welche u_3 mit den ∞^2 Schaaren der Congruenz $|u_2|$ verbinden (vgl. 4.), und folglich (5.) jede durch zwei seiner Büschel gehende Schaar, also auch jede durch drei seiner Büschel bestimmte Congruenz. Er ist durch je vier seiner projectiven Büschel, die keiner linearen Congruenz angehören, ebenso bestimmt, wie durch u, u_1, u_2 und u_3, und seine ∞^3 Büschel bilden ∞^3 lineare Congruenzen und ∞^4 Schaaren.

8. Die homologen Ebenen der ∞^3 projectiven Büschel von $|u_3|$ bilden ∞^1 räumliche Ebenensysteme oder Räume Σ, Σ_1, ..., auf welche der Complex $|u_3|$ eindeutig bezogen ist. Zu jedem Büschel u von $|u_3|$ gehört nämlich eine Ebene ε oder ε_1 von Σ resp. Σ_1. Diese Ebene nun dreht sich um eine Axe resp. einen Punkt, wenn u in dem Complexe $|u_3|$ eine Büschelschaar resp. eine lineare Congruenz beschreibt (2., 4.). Da auch das Umgekehrte gilt, so entspricht jeder Ebene ε von Σ eine Ebene ε_1 von Σ_1, und jedem Ebenenbüschel oder Bündel von Σ ein solcher von Σ_1; kurz, die Räume Σ, Σ_1, ... sind *collinear.*

Der lineare Complex $|u_3|$ ruht also auf einem „Büschel collinearer Räume", einem „Raumbüschel" $(\Sigma\Sigma_1)$ oder $|\Sigma_1|$. Die homologen Ebenen der ∞^1 Räume von $|\Sigma_1|$ bilden je einen Büschel von $|u_3|$, während die homologen Ebenen der ∞^3 Büschel von $|u_3|$ je einen Raum des Raumbüschels $|\Sigma_1|$ bilden. Die ∞^3 linearen Büschelcongruenzen von $|u_3|$ stützen sich auf die ∞^3 Reihen homologer Bündel der collinearen Räume Σ, Σ_1, ... und erzeugen ∞^3 projective kubische „Ordnungscurven" c^3 von $|u_3|$ und $|\Sigma_1|$, deren homologe Punkte zu je einem der Räume gehören. Je zwei Räume von $|\Sigma_1|$ erzeugen die nämlichen ∞^3 Ordnungscurven mittelst ihrer homologen Bündel (4.); sie bestimmen damit zugleich die ∞^3 linearen Congruenzen von $|u_3|$ und überhaupt diesen ganzen Complex. Homologe Punkte der ∞^1 Räume von $|\Sigma_1|$ liegen auf je einer kubischen Ordnungscurve c^3; homologe Gerade derselben liegen i. A. in einer Regelschaar, und nur dann, wenn sie sich schneiden, auf einem Kegel zweiter Ordnung (vergl. 2., 3.).

9. Der lineare Complex $|u_3|$ projectiver Ebenenbüschel und der ihn stützende Raumbüschel $|\Sigma_1|$ sind demnach ebensowohl durch je zwei collineare Räume Σ, Σ_1 des letzteren wie durch beliebige vier projective Büschel

des ersteren bestimmt. Sie hängen i. A. von 13 Parametern ab (vgl. 1.), weil jeder der Räume Σ und Σ_1 mit ∞^1 anderen in $|\Sigma_1|$ vertauscht werden kann.

In den Axen der ∞^3 Büschel von $|u_3|$ schneiden sich je zwei homologe Ebenen von Σ und Σ_1. Da nun durch einen beliebigen Punkt P zwei Büschel homologer Ebenen von Σ und Σ_1 gehen, welche einen Kegel P^2 zweiter Ordnung erzeugen, so bilden die ∞^3 Axen von $|u_3|$ einen quadratischen Strahlencomplex Γ^2. Derselbe besteht aus den Schnittlinien homologer Ebenen der collinearen Räume, folglich auch aus den Strahlen von Σ, welche ihre homologen Strahlen von Σ_1 schneiden, und i. A. zugleich aus den Verbindungslinien homologer Punkte von Σ und Σ_1. Die ∞^1 in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Complexes Γ^2 werden durch homologe Punktreihen der Räume erzeugt und umhüllen i. A. einen Kegelschnitt.

Durch den Strahlencomplex Γ^2 ist der lineare Büschelcomplex $|u_3|$ und die projective Beziehung seiner ∞^3 Ebenenbüschel, also auch der Raumbüschel $|\Sigma_1|$ i. A. völlig bestimmt. Denn die Strahlen von Γ^2 sind die Axen der Büschel von $|u_3|$, je zwei dieser Büschel aber erzeugen, wenn ihre Axen sich schneiden, den Complexkegel P^2 des Schnittpunktes P, wodurch i. A. ihre projective Beziehung bestimmt ist; mittelst der übrigen ∞^3 Kegel von Γ^2 gelangt man ebenso zu der projectiven Beziehung aller Büschel von $|u_3|$.

Zu dem quadratischen Complexe Γ^2 gehören die Sehnen der ∞^3 kubischen Ordnungscurven c^3 (8., 4.).

10. Den Büscheln, Büschelschaaren und linearen Congruenzen des Complexes $|u_3|$ entsprechen in jedem der collinearen Räume von $|\Sigma_1|$ dessen Ebenen, Ebenenbüschel resp. -Bündel. Zwei lineare Congruenzen von $|u_3|$ haben demgemäss allemal eine Schaar projectiver Büschel gemein, deren Axen durch homologe Ebenenbüschel der collinearen Räume erzeugt werden und eine Schaar gemeinsamer Sehnen der zugehörigen beiden Ordnungscurven bilden. Zwei beliebige kubische Ordnungscurven c^3 des Complexes können demnach durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden und haben ∞^1 Gerade derselben zu gemeinsamen Sehnen. Eine lineare Congruenz und eine Schaar oder drei lineare Congruenzen des Complexes $|u_3|$ haben allemal einen Ebenenbüschel gemein.

11. Die kubischen Raumcurven, welche vier beliebige projective Büschel des linearen Complexes $|u_3|$ zu dreien mit einander erzeugen, haben bekanntlich i. A. vier reelle oder imaginäre Punkte gemein, in denen je

vier homologe Ebenen der Büschel sich schneiden. In diesen vier „*Hauptpunkten*" des Complexes $|u_3|$ und des ihn stützenden Raumbüschels $|\Sigma_1|$ schneiden sich homologe Ebenen aller Büschel von $|u_3|$ (2., 4., 7.). durch sie gehen folglich die ∞^3 Ordnungscurven c^3 und die ∞^4 Ordnungsflächen F^2 aller linearen Congruenzen und Schaaren von $|u_3|$. Vier „singuläre" Räume von $|\Sigma_1|$ reduciren sich auf die Ebenenbündel der vier Hauptpunkte und haben je einen derselben zum Mittel- oder „Doppelpunkte"; ihre Collineation zu jedem der übrigen Räume von $|\Sigma_1|$ ist eine ausgeartete.

Durch jeden Hauptpunkt D gehen die Axen von ∞^2 Büscheln des Complexes $|u_3|$. Diese Büschel bilden eine specielle lineare Congruenz (6*b*.), den Träger einer Reihe concentrischer Bündel D, die einander in den collinearen Räumen von $|\Sigma_1|$ entsprechen (vgl. 8.). Die ∞^1 collinearen Räume von $|\Sigma_1|$ haben demnach jeden Hauptpunkt entsprechend gemein, und damit zugleich die sechs Kanten und vier Ebenen des von den vier Hauptpunkten gebildeten „*Haupttetraeders*". Auf jede der vier „Hauptebenen" reducirt sich ein Büschel von $|u_3|$; als Axe desselben kann jede Gerade der Ebene betrachtet werden (vgl. 3.).

12. Der quadratische Strahlencomplex Γ^2 der Axen von $|u_3|$ enthält alle Strahlen der vier Hauptpunkte und der vier Hauptebenen, seine ∞^3 Kegel sind wie die übrigen ∞^4 Ordnungsflächen F^2 und wie die ∞^3 kubischen Ordnungscurven c^3 dem Haupttetraeder umschrieben, und aus seinen Strahlen werden die vier Hauptpunkte durch projective, zu $|u_3|$ gehörige Ebenenbüschel projicirt (11.). Die ∞^3 Complexkegelschnitte (9.) werden von den vier Hauptebenen berührt. Jede Kante des Haupttetraeders ist Axe einer singulären Schaar des Complexes $|u_3|$; jede der ∞^3 projectiven Ordnungscurven von $|u_3|$ wird aus ihr durch einen Büschel dieser Schaar projicirt. Der „tetraedrale" Strahlencomplex Γ^2 hat demnach die sechs Kanten des Haupttetraeders zu Doppelstrahlen. Drei beliebige Strahlen s, s_1, s_2 von Γ^2 sind Sehnen einer durch sie bestimmten Ordnungscurve c^3; dieselbe wird durch die drei Büschel von $|u_3|$ erzeugt, welche s, s_1 und s_2 zu Axen haben, und geht, wenn s von s_1 und s_2 geschnitten wird, durch die beiden Schnittpunkte. Zwei Punkte eines beliebigen Strahles s von Γ^2 können deshalb allemal durch eine kubische Ordnungscurve c^3 verbunden werden.

Von den ∞^3 Ordnungscurven c^3 zerfallen ∞^2 in Kegelschnitte durch drei Hauptpunkte und je einen Strahl g des vierten (vgl. 6.), ferner ∞^1 in je eine Kante v des Haupttetraeders und in zwei mit v incidente Strahlen

der ausserhalb v gelegenen beiden Hauptpunkte (6*a*.). Der tetraedrale Strahlencomplex Γ^2 enthält demgemäss i. A. sechs Schaaren linearer Strahlencongruenzen.

13. Die wichtigsten *Specialfälle* des linearen Complexes $|u_3|$ projectiver Ebenenbüschel und des Raumbüschels $|\Sigma_1|$ sind folgende.

Wenn vier homologe Ebenen der projectiven Büschel u, u_1, u_2, u_3 in einer Geraden g sich schneiden, so zerfallen (6.) die ∞^3 Ordnungscurven c^3 des Complexes $|u_3|$ in g und je einen Kegelschnitt c^2; weil sie aber paarweise durch Flächen zweiter Ordnung verbunden werden können (10.), so haben diese Kegelschnitte i. A. zwei Hauptpunkte A, B gemein. In A, B und g schneiden sich homologe Ebenen der ∞^3 Büschel von $|u_3|$, und durch A und B gehen die ∞^3 Ordnungskegelschnitte c^2. Auf jede der ∞^1 Ebenen dieser c^2 reducirt sich (6.) ein Büschel von $|u_3|$.

Die collinearen Räume von $|\Sigma_1|$ haben die Hauptpunkte A, B sowie alle Punkte von g und alle Ebenen der Geraden AB entsprechend gemein; zwei von ihnen reduciren sich auf die Bündel A, B, und ein dritter auf den Ebenenbüschel g. Die ∞^2 Büschel von $|u_3|$, deren Axen in einer beliebigen Ebene φ von g liegen, erzeugen zu dreien die Gerade AB (6*c*.). Zwei collineare Räume bestimmen einen solchen speciellen Raumbüschel $|\Sigma_1|$, wenn sie eine Punktreihe g oder einen Ebenenbüschel AB entsprechend gemein haben. Die Axen der ∞^3 Büschel von $|u_3|$ bilden die speciellen Complexe der mit g oder AB incidenten Geraden, und jede durch g, A und B gehende Fläche zweiter Ordnung ist Ordnungsfläche einer Schaar von $|u_3|$. — In diesem Falle hängen $|u_3|$ und $|\Sigma_1|$ von zehn Parametern ab.

13*a*. Schneiden sich die homologen Ebenen von u, u_1, u_2 und u_3 in je einem Punkte einer Geraden v, so reduciren sich alle Räume von $|\Sigma_1|$ auf Ebenenbündel, deren Mittelpunkte in v liegen. Die ∞^3 Ordnungscurven c^3 zerfallen in v und je zwei mit v incidente Gerade, die ∞^3 Büschel von $|u_3|$ liegen alle zu der Punktreihe v perspectiv (6*a*.), und v ist die Axe einer singulären Congruenz von $|u_3|$ (vgl. 6*d*.). Die Axen der ∞^3 Büschel von $|u_3|$ bilden einen durch v und die vier Axen von u, u_1, u_2, u_3 bestimmten, linearen Strahlencomplex; bezüglich desselben sind je zwei Gerade g, h, die mit v zusammen eine kubische Ordnungscurve c^3 bilden, einander zugeordnet. Die ∞^4 Ordnungsflächen F^2 gehen alle durch v und je eine Regelschaar des linearen Strahlencomplexes. — Dieser specielle Complex $|u_3|$ hängt von acht Parametern ab.

13*b*. Wenn die vier Axen der projectiven Büschel u, u_1, u_2, u_3 und folglich alle Axen von $|u_3|$ durch einen Punkt D gehen, so besteht der lineare Complex $|u_3|$ aus ∞^2 singulären Schaaren, welche die Strahlen von D zu Axen haben; die ∞^1 collinearen Räume von $|\Sigma_1|$ aber reduciren sich alle auf Ebenenbündel mit dem Centrum D. Die ∞^3 linearen Congruenzen von $|u_3|$ ruhen auf je einer Reihe concentrischer collinearer Bündel D, und ihre Ordnungscurven c^3 zerfallen in je drei Strahlen d, die Axen von drei singulären Schaaren der betreffenden Congruenz (6*b*.). Die ∞^3 Strahlentripel $3d$ dieser Congruenzen liegen zu zweien auf Kegeln zweiter Ordnung, welche je ∞^1 Strahlentripeln umschrieben sind, und von je einer, den zugehörigen Congruenzen gemeinsamen Schaar die Ordnungsflächen sind. Die Ebenentripel der ∞^3 Strahlentripel umhüllen, wie sich später (43.) ergeben wird, einen Kegel zweiter Klasse, den „Hauptkegel" von $|u_3|$; auf jede ihrer Ebenen reducirt sich (6*b*.) ein Büschel von $|u_3|$. Auch dieser Complex $|u_3|$ hängt von acht Parametern ab, falls nicht der Kegel in zwei Gerade ausartet.

13*c*. Der Raumbüschel $|\Sigma_1|$ besteht, wenn u, u_1, u_2, u_3 eine Ebene φ entsprechend gemein haben, aus ∞^1 perspectiven Räumen mit der Collineationsebene φ; zugleich wird φ der Ort der Axen aller Büschel von $|u_3|$ (vgl. 3.). Nämlich die linearen Congruenzen des Complexes $|u_3|$ stützen sich auf je eine Reihe perspectiver Bündel (6*c*.), die φ zur Collineationsebene haben und in den Räumen von $|\Sigma_1|$ einander entsprechen; die Geraden w aber, welche die Mittelpunkte der Bündel dieser Reihen enthalten (6*c*.), gehen alle durch das „Collineationscentrum" C, in welchem homologe Ebenen von u, u_1, u_2, u_3 und den übrigen Büscheln von $|u_3|$ sich schneiden. Ein Raum von $|\Sigma_1|$ reducirt sich auf den Bündel C, ein anderer auf die Ebene φ. Jede Gerade von φ ist Axe einer singulären Schaar von $|u_3|$; auf φ und auf jede Ebene von C reducirt sich ein Büschel des linearen Complexes $|u_3|$ (vgl. 6*c*.). — Da $|\Sigma_1|$ und $|u_3|$ durch das Centrum und die Ebene der Collineation bestimmt sind, so hängen sie von sechs Parametern ab.

13*d*. Haben Σ und Σ_1 und damit alle collinearen Räume von $(\Sigma\Sigma_1)$ oder $|\Sigma_1|$ die Strahlen einer linearen Strahlencongruenz entsprechend gemein, so zerfallen die kubischen Ordnungscurven c^3 in je einen Strahl und die beiden reellen oder imaginären Leitgeraden g, h dieser Congruenz (vgl. 6*a*.). Die collinearen Räume haben alsdann auch alle Punkte und Ebenen von g und h entsprechend gemein; der auf $|\Sigma_1|$ ruhende Complex $|u_3|$ aber besteht aus ∞^2 singulären Büschelschaaren, welche die ∞^2 Strahlen

jener Congruenz zu Axen haben. In g und h schneiden sich homologe Ebenen aller Büschel von $|u_3|$, und zwei Räume von $|\Sigma_1|$ reduciren sich auf die Ebenenbüschel g und h, indem sie deren Ebenen je ∞^2 mal enthalten. — Da $|\Sigma_1|$ und $|u_3|$ durch die beiden Geraden g und h bestimmt sind, so hängen sie von acht Parametern ab.

13*e*. Haben die vier Büschel u, u_1, u_2, u_3 dieselbe Axe a, so besteht der Complex $|u_3|$ aus den ∞^3 projectiven Ebenenbüscheln, die a zur Axe haben, die Räume von $|\Sigma_1|$ aber reduciren sich alle auf Ebenenbüschel mit der Axe a.

§ 4.

Netze $|S_2|$ collinearer Bündel.

14. Drei collineare Bündel S, S_1, S_2, die nicht derselben Bündelreihe angehören, bestimmen eine „lineare Congruenz" (SS_1S_2) oder ein „Netz"*) $|S_2|$ collinearer Bündel, indem sie zugleich eine durch ihre Mittelpunkte gehende Fläche F^3 dritter Ordnung erzeugen. Zu diesem Netze $|S_2|$ rechnen wir die Bündelreihe (SS_1), sowie die ∞^2 Bündel der ∞^1 Reihen, welche S_2 mit den Bündeln von (SS_1) bestimmt. Die ∞^2 collinearen Bündel des Netzes $|S_2|$ erzeugen zu dreien alle dieselbe kubische Fläche F^3, wie S, S_1 und S_2; ihre homologen Ebenen nämlich schneiden sich in je einem Punkte P von F^3 (vgl. 4.) und bilden ∞^2 Bündel P, von deren Mittelpunkten F^3 der geometrische Ort ist.

15. Auch diese Bündel P sind collinear und bilden ein zweites auf $|S_2|$ ruhendes Netz $|P_2|$. Denn durch die homologen Ebenenbüschel der collinearen Bündel von $|S_2|$ wird auf der Fläche F^3 je eine kubische Raumcurve k^3 und zugleich je eine Reihe collinearer Bündel erzeugt, welche ihrerseits die Sehnencongruenz von k^3 erzeugen (4.); je zwei Bündel dieser ∞^2 Reihen aber können als zwei beliebige des Netzes $|P_2|$ betrachtet werden, und durch beliebige drei derselben ist $|P_2|$ bestimmt (14.).

Die collinearen Bündel dieses zweiten Netzes $|P_2|$ erzeugen zu dreien dieselbe kubische Fläche F^3, wie diejenigen des ersteren $|S_2|$; ihre homologen Ebenen bilden die collinearen Bündel von $|S_2|$. Jedes der beiden sich stützenden Netze ist durch homologe Ebenen auf die Bündel des anderen projectiv bezogen.

*) Dieser Name rührt von Herrn *Schur* her.

16. Die sich stützenden Netze $|S_2|$ und $|P_2|$ sind durch je drei keiner Reihe angehörige collineare Bündel des einen oder des anderen Netzes bestimmt; sie hängen i. A. gleich ihrer „Ordnungsfläche" F^3 von 19 Parametern ab*). Jedes von ihnen enthält alle durch je zwei seiner Bündel bestimmten Bündelreihen; letzere aber haben zu zweien allemal einen Bündel gemein (vgl. 5., 10.). Die kubische Ordnungsfläche F^3 enthält demgemäss die ∞^2 kubischen Ordnungscurven dieser Reihen und des betreffenden Netzes; diese Curven aber sind auf F^3 durch je zwei ihrer Punkte bestimmt und haben zu zweien allemal einen Punkt gemein. Zwei Bündelreihen können durch ein Netz verbunden werden und bestimmen dasselbe, wenn sie einen Bündel gemein haben.

17. Die ∞^2 kubischen Ordnungscurven der Netze $|S_2|$ und $|P_2|$ bilden auf der Ordnungsfläche F^3 zwei „Curvennetze"; durch einen beliebigen Punkt P der Fläche geht ein Büschel von ∞^1 Ordnungscurven jedes Netzes, und zwar geht nach jedem anderen Punkte P_1 von F^3 eine Curve desselben (16.). Jede Ordnungscurve c^3 wird erzeugt durch eine Reihe collinearer Bündel des betreffenden Netzes, zugleich aber durch ∞^2 homologe Ebenenbüschel der Bündel des anderen Netzes; die Axen dieser Büschel sind die Sehnen von c^3 (4.). Die Sehnen, welche aus den Punkten Q, Q_1, Q_2, ... von F^3 an die einzelnen Ordnungscurven des einen Netzes gehen, entsprechen demnach einander in den collinearen Bündeln Q, Q_1, Q_2, ... des anderen Netzes; auch durch sie sind diese Bündel auf einander collinear, auf jenes Curvennetz aber projectiv bezogen. Die Sehnen aus Q an alle durch P gehenden Curven des Netzes liegen mit P in einer Ebene, welche die homologen Ebenen der Bündel Q_1, Q_2, ... in P schneidet. Durch je zwei dieser kubischen Raumcurven ist hiernach die Ordnungsfläche F^3 völlig bestimmt und leicht construirbar**).

Jede Ordnungscurve c^3 des einen Netzes kann mit jeder Ordnungscurve k^3 des anderen durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche von c^3 und k^3 je eine Sehnenschaar enthält. Denn k^3 wird durch zwei Bündel Q, Q_1 des letzteren Netzes erzeugt, und c^3 durch homologe Ebenenbüschel g, g_1, g_2, ... der Bündel Q, Q_1, Q_2, ... desselben;

*) Drei Bündel S, S_1, S_2 können nämlich auf ∞^{16} Arten collinear auf einander bezogen werden (1.), und erzeugen, wenn ihre Mittelpunkte hernach drei beliebige Gerade durchlaufen, die ∞^{19} möglichen Netze $|S_2|$ und kubischen Flächen F^3.

**) Vgl. meine „Geometrie der Lage" II., 2. Aufl. S. 197.

die beiden Büschel g, g_1 aber erzeugen jene durch c^3 und k^3 gehende Fläche zweiter Ordnung.

18. In den drei collinearen Bündeln S, S_1, S_2 giebt es bekanntlich i. A. sechs Tripel homologer Ebenen, die in je einer Geraden p sich schneiden*). In diesen sechs „Hauptstrahlen" p der Fläche F^3 und des Netzes $|P_2|$ schneiden sich je ∞^2 homologe Ebenen der Bündel von $|S_2|$; die sechs p sind folglich gemeinschaftliche Sehnen der ∞^2 Ordnungscurven c^3 von $|S_2|$, und ∞^1 Ordnungscurven k^3 von $|P_2|$ zerfallen in je einen Kegelschnitt und einen der sechs Hauptstrahlen p (6.). Sechs Bündel von $|P_2|$ arten aus in die sechs Ebenenbüschel p; ihre Mittelpunkte können auf den Hauptstrahlen p beliebig angenommen werden. Ebenso arten i. A. sechs Bündel des Netzes $|S_2|$ aus in Ebenenbüschel, welche sechs Hauptstrahlen s von $|S_2|$ zu Axen haben. Auf der kubischen Fläche F^3 bilden bekanntlich die sechs p und die sechs s die beiden Hälften einer *Schläfli*schen Doppelsechs; d. h. jeder Strahl p oder s schneidet fünf der sechs windschiefen Strahlen s resp. p, und bildet mit den Kegelschnitten von F^3, deren Ebenen durch den sechsten Strahl gehen, kubische Ordnungscurven von $|P_2|$ resp. $|S_2|$. Dieses folgt leicht aus dem Satze (17.), dass jede Ordnungscurve von $|S_2|$ mit jeder von $|P_2|$ auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt.

19. Wir wenden uns zu den wichtigsten *Specialfällen* der Bündelnetze $|S_2|$ und $|P_2|$. Wenn von den collinearen Bündeln S, S_1, S_2 drei homologe Strahlen durch einen Punkt D gehen, so schneiden sich in D homologe Strahlen der ∞^2 Bündel beider sich stützenden Netze, alle Ordnungscurven gehen durch D, und zwei Bündelreihen der Netze haben D zum Mittelpunkt. Zugleich wird D ein Doppel- oder Knotenpunkt der Ordnungsfläche F^3, und sechs Hauptstrahlen, drei von jedem Netze (6*b*.), gehen durch D. Dieselben bilden zwei Ordnungscurven c^3 und k^3 der Netze und liegen (17.) auf einem Kegel zweiter Ordnung, welcher der Ordnungsfläche in D sich anschmiegt. Die Netze $|S_2|$ und $|P_2|$ hängen in diesem Falle von 18 Parametern ab.

Schneiden sich in vier beliebigen Punkten D je drei homologe Strahlen von S, S_1 und S_2, so haben beide sich stützenden Netze die sechs Verbindungslinien dieser Punkte zu Hauptstrahlen (18.) und fallen überhaupt zusammen; denn ihre beiden durch zwei beliebige Punkte von F^3

*) *Schroeter*, dieses Journal. Bd. 62, S. 270; vgl. *Reye*, Geom. der Lage, II., 2. Aufl., S. 216.

bestimmten kubischen Ordnungscurven sind identisch, weil sie auch die vier Doppelpunkte D enthalten. Die Zahl der Parameter ist 15.

19*a*. Schneiden sich in den Punkten D einer Geraden v je drei homologe Strahlen von S, S_1, S_2, so besteht das Netz $|P_2|$ aus ∞^1 Reihen concentrischer Bündel mit den Mittelpunkten D (6*b*.); die ∞^2 kubischen Ordnungscurven von $|P_2|$ zerfallen in v und je zwei mit v incidente Gerade, und die ∞^2 Bündel von $|P_2|$ haben alle den Strahl v entsprechend gemein (6*a*.). Auf den Ebenenbüschel v reduciren sich deshalb ∞^1 Bündel von $|S_2|$ und einer von $|P_2|$, die kubische Ordnungsfläche F^3 wird geradlinig und hat v zur Doppelpunktsgeraden, die ∞^2 Ordnungscurven des Netzes $|S_2|$ aber zerfallen in v und je einen Kegelschnitt (6.). Zwei beliebige Bündel von $|S_2|$ haben allemal eine Ebene entsprechend gemein. Von $|P_2|$ reduciren sich ∞^1 Bündel auf Ebenenbüschel (6*a*., 6*b*.), deren Axen auf F^3 liegen. Die Strahlen von F^3 schneiden sich paarweise in den Punkten von v (6*b*.); die Ebenen dieser Strahlenpaare gehen alle durch eine Gerade w von F^3 und entsprechen einander in den Bündeln von $|P_2|$. Ein Bündel von $|S_2|$ reducirt sich folglich auf den Büschel w.

Wenn die collinearen Bündel S, S_1, S_2 einen Strahl v entsprechend gemein haben, so besteht $|S_2|$ aus ∞^1 Reihen concentrischer Bündel, deren Mittelpunkte auf v liegen (6*a*., 6*b*.), in jedem Punkte von v schneiden sich ∞^1 homologe Strahlen der Bündel von $|P_2|$, die Ordnungsfläche F^3 aber ist wiederum geradlinig und hat v zur Doppelpunktsgeraden. Der Specialfall unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur insofern, als die Netze $|S_2|$ und $|P_2|$ ihre Rollen vertauscht haben. Diese speciellen Netze hängen von 13 Parametern ab.

19*b*. Wenn die collinearen Bündel S, S_1, S_2 eine Ebene φ entsprechend gemein haben, so zerfällt die Ordnungsfläche F^3 in φ und eine Regelfläche F^2 zweiter Ordnung, und zwar liegen auf φ resp. F^2 die Mittelpunkte der ∞^2 Bündel von $|S_2|$ resp. $|P_2|$; ein Bündel von $|P_2|$ reducirt sich auf φ und sein Mittelpunkt ist ein beliebiger Punkt dieser Ebene. Die ∞^2 kubischen Ordnungscurven von $|S_2|$ bestehen (6.) aus je einem Kegelschnitte c^2 in φ und je einer Geraden g, welche zu der einen Regelschaar $|g_1|$ von F^2 gehört; auf die Ebenenbüschel g reduciren sich ∞^1 Bündel von $|S_2|$. Die ∞^1 ausgearteten Bündel von $|S_2|$ bilden eine specielle Reihe $|S_1|$, denn sie senden in jeden Bündel von $|P_2|$ einen Büschel homologer Ebenen, dessen Axe ein Leitstrahl von $|g_1|$ ist. Die ∞^2 Kegel-

Σ_2 mit den einzelnen Räumen von $(\Sigma\Sigma_1)$ verbinden (9.). Die homologen Ebenen der ∞^2 Räume von $|\Sigma_2|$ bilden einen „linearen Complex"*) $|S_3|$ von ∞^3 Ebenenbündeln S, S_1, S_2, S_3, ...; durch jeden Schnittpunkt homologer Ebenen von Σ, Σ_1 und Σ_2 gehen nämlich (8.) homologe Ebenen aller ∞^2 collinearen Räume von $|\Sigma_2|$. Ein beliebiger Punkt S ist i. A. Mittelpunkt *eines* Bündels dieses Complexes $|S_3|$; sind nämlich S' und S'' die beiden Punkte von Σ, welchen in Σ_1 resp. Σ_2 der Punkt S entspricht, so hat die Ebene $SS'S''$ von Σ mit den homologen Ebenen von Σ_1 und Σ_2 diesen Punkt S gemein.

Durch die homologen Ebenenbüschel der ∞^2 Räume wird je eine kubische „Ordnungscurve" c^3 des Raumbündels $|\Sigma_2|$ und des Complexes $|S_3|$, zugleich aber je eine Reihe *collinearer* Bündel erzeugt, welche ihrerseits die Sehnencongruenz von c^3 erzeugen (4.). Zwei Bündel einer solchen Reihe aber sind ganz beliebige Bündel von $|S_3|$.

21. Der lineare Complex $|S_3|$ besteht also aus ∞^3 collinearen Bündeln, und enthält jede Reihe $|S_1|$, welche zwei, sowie jedes Netz $|S_2|$, welches beliebige drei seiner Bündel verbindet. Er stützt den Raumbündel $|\Sigma_2|$; denn nicht nur bilden die homologen Ebenen der ∞^2 collinearen Räume von $|\Sigma_2|$ die ∞^3 Bündel von $|S_3|$, sondern die homologen Ebenen dieser collinearen Bündel bilden ebenso jene ∞^2 collinearen Räume. Durch die homologen Ebenen ist der Raumbündel auf jeden Bündel des Complexes und letzterer auf jeden Raum des ersteren projectiv bezogen. Der Raumbündel $|\Sigma_2|$ enthält demgemäss jeden durch zwei seiner Räume bestimmten Raumbüschel, und je zwei seiner Büschel $|\Sigma_1|$ haben einen Raum gemein. Die ∞^3 Netze des Complexes $|S_3|$ haben zu zweien allemal eine Bündelreihe und zu dreien i. A. *einen* Bündel gemein.

22. Der Raumbündel $|\Sigma_2|$ und der ihn stützende lineare Complex $|S_3|$ sind (21.) ebensowohl durch je vier, keinem Netze angehörende collineare Bündel des letzteren, wie durch je drei, keinem Raumbüschel angehörige collineare Räume des ersteren bestimmt. Sie hängen i. A., wie die Collineation von vier Bündeln mit gegebenen Mittelpunkten (1.), von 24 Parametern ab (*Schur* a. a. O. S. 16).

Die ∞^4 Bündelreihen und ∞^3 Netze von $|S_3|$ erzeugen je eine kubische „Ordnungscurve" c^3 resp. „Ordnungsfläche" F^3 von $|S_3|$ und $|\Sigma_2|$;

*) Herr *Schur* nennt a. a. O. diesen Complex ein „Gebüsch" collinearer Ebenenbündel.

dieselben Curven c^3 und Flächen F^3 werden durch je einen linearen Complex homologer Ebenenbüschel resp. Bündel der ∞^2 Räume von $|\Sigma_2|$ erzeugt (vgl. 20.). Die homologen Punkte dieser Räume liegen demnach auf je einer Ordnungsfläche F^3, und ihre homologen Geraden sind die Sehnen von je einer Ordnungscurve c^3. Zwei resp. drei beliebige Punkte S können allemal durch eine kubische Ordnungs-Curve oder -Fläche verbunden werden. Die ∞^3 Ordnungsflächen F^3 haben zu zweien allemal eine Ordnungscurve c^3 gemein und bestimmen zu dreien i. A. *einen* gemeinschaftlichen Punkt (21.).

23. Zwei kubische Ordnungsflächen F^3 haben ausser einer Ordnungscurve c^3 noch eine Raumcurve c^6 sechster Ordnung gemein; in jedem Punkte von c^6 aber schneiden sich homologe Ebenen der Bündel von $|S_3|$, welche die beiden F^3 erzeugen, und folglich aller Bündel von $|S_3|$. Diese *„Kerncurve“* c^6 des Raumbündels $|\Sigma_2|$ und des linearen Complexes $|S_3|$ wird durch je vier collineare Bündel des letzteren erzeugt, und durch sie gehen alle ∞^3 Ordnungsflächen F^3. Sie ist den Haupttetraedern der ∞^2 Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ umschrieben (11.), und jeder ihrer Punkte ist von ∞^1 dieser Tetraeder ein Eckpunkt und von einem singulären Raume (Ebenenbündel) von $|\Sigma_2|$ der Doppel- oder Mittelpunkt (11.). Die Schnittpunkte einer Ordnungscurve c^3 mit einer Ordnungsfläche F^3 liegen alle bis auf einen (22.) auf der Kerncurve c^6. Mit den ∞^4 Ordnungscurven c^3 hat demnach c^6 i. A. je acht Punkte gemein *).

24. In jedem Punkte D der Kerncurve c^6 schneiden sich die Axen von ∞^2 homologen Ebenenbüscheln der collinearen Räume von $|\Sigma_2|$, sowie drei Gerade d, durch welche je ∞^2 homologe Ebenen dieser Büschel gehen (6*b*.). Zugleich ist D der Mittelpunkt von ∞^1 Bündeln, welche eine Reihe von $|S_3|$ bilden und jene drei Strahlen entsprechend gemein haben; drei dieser Bündel reduciren sich auf die Ebenenbüschel d (6*b*.). Von ∞^1 kubischen Ordnungsflächen ist D ein Doppelpunkt (19.). Die drei Geraden d bilden zusammen eine der Ordnungscurven c^3 (6*b*., 22.); auch ihre von D verschiedenen Schnittpunkte mit einer beliebigen Ordnungsfläche F^3 liegen deshalb auf der Kerncurve c^6 (23.), und die Geraden d sind demnach *„Doppelsehnen“* von c^6. Dasselbe gilt von jeder Geraden d, welche mit einem Kegelschnitte zusammen eine Ordnungscurve c^3 bildet, wie überhaupt

*) Analytisch ergiebt sich diese Anzahl sofort; rein synthetisch ist sie bis jetzt nicht nachweisbar.

von der Axe eines jeden Ebenenbüschels, auf welchen ein Bündel von $|S_3$ sich reducirt (vgl. 6.).

25. In den Punkten von c^6 schneiden sich also je drei Doppelsehnen d dieser Kerncurve, und die Doppelsehnen d haben mit c^6 je drei Punkte gemein. In jeder Doppelsehne d schneiden sich ∞^2 homologe Ebenen der Räume von $|\Sigma_2|$, und ∞^1 Bündel von $|S_3|$ reduciren sich auf die Ebenenbüschel d. Wenn eine Ordnungscurve c^3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt, so ist letztere eine Doppelsehne von c^6. Die ∞^3 Ordnungsflächen F^3 enthalten i. A. je sechs Doppelsehnen von c^6, nämlich die sechs Hauptstrahlen der zugehörigen Netze $|S_2|$ von $|S_3|$ (vgl. 18.). Die Ebenen des Raumes Σ, welche mit den entsprechenden Ebenen von Σ_1 und Σ_2 je eine Gerade gemein haben, bilden demnach einen Ebenenbüschel sechster Ordnung.

So oft von ∞^2 homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_2|$ zwei sich vereinigen oder beliebige drei durch eine Gerade gehen, bilden dieselben einen ausgearteten Bündel von $|S_3|$ und schneiden sie sich in einer Doppelsehne d von c^6. Die Haupttetraeder der ∞^2 Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ sind deshalb nicht nur der Kerncurve c^6 eingeschrieben (23.), sondern zugleich gehen ihre Flächen, weil sie mit homologen Ebenen zusammenfallen (11.), durch je eine Doppelsehne von c^6.

Der Ort der Doppelsehnen von c^6 ist eine Fläche (achter Ordnung), die ausser ihrer dreifachen Curve c^6 je sechs Gerade d mit den kubischen Ordnungsflächen gemein hat. Zwei Doppelsehnen d können nur auf c^6 sich schneiden; denn durch ihren Schnittpunkt gehen ∞^2 homologe Strahlen der Räume von $|\Sigma_2|$. Drei beliebige Punkte und die drei sie paarweise verbindenden Ordnungscurven c^3 liegen mit der Kerncurve c^6 allemal auf einer kubischen Ordnungsfläche 22., 23.). Diese Fläche verbindet c^6 mit drei beliebigen Doppelsehnen, wenn auf letzteren die drei Punkte angenommen werden.

26. Die vier Hauptpunkte eines beliebigen Raumbüschels $|\Sigma_1|$ von $|\Sigma_2|$ können mit jeder Ordnungscurve c^3 durch eine Fläche F^2 zweiter Ordnung verbunden werden. Denn in den collinearen Bündeln von $|S_3|$, welche die c^3 erzeugen, entsprechen dem Raumbüschel $|\Sigma_1|$ homologe Ebenenbüschel (21.); diese aber erzeugen paarweise jene F^2. Jeder Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ erzeugt übrigens (9., 12.) einen durch alle Doppelsehnen von c^6 gehenden tetraedralen Strahlencomplex, indem von seinen ∞^1 Räumen

in jeder Doppelsehne ∞^1 homologe Ebenen sich schneiden (25.); seine vier Hauptpunkte werden aus den Doppelsehnen d durch projective Ebenenbüschel projicirt (12.). Die ∞^2 durch eine beliebige Ordnungscurve gehenden Flächen zweiter Ordnung schneiden also die Kerncurve c^6 in den Hauptpunktquadrupeln der ∞^2 Raumbüschel von $|\Sigma_2|$. Insbesondere können beliebige drei durch einen Punkt gehende Doppelsehnen d von c^6 mit den Hauptpunktquadrupeln durch Kegel zweiter Ordnung verbunden werden (vgl. 24.). Durch diese Punktquadrupel und die Doppelsehnen von c^6 sind die zugehörigen tetraedralen Strahlencomplexe und Raumbüschel bestimmt (12., 9.). Auch der Raumbündel $|\Sigma_2|$ ist deshalb durch seine Kerncurve c^6 i. A. völlig bestimmt, ebenso aber der Bündelcomplex $|S_3|$. Durch zwei auf c^6 angenommene Punkte eines Quadrupels sind die beiden übrigen bestimmt.

Wenn die Ordnungscurve c^3 in eine Doppelsehne d und einen Kegelschnitt c^2 zerfällt, so verbindet letzterer i. A. fünf Punkte von c^6 und seine Ebene schneidet c^6 noch in einem sechsten Punkte D. Die Hauptpunktquadrupel aber, welchen D angehört, enthalten je drei mit d in einer Ebene liegende Punkte; denn jede durch D und c^3 gehende Fläche zweiter Ordnung zerfällt in die Ebene von c^2 und eine Ebene durch d.

27. Zu jeder Doppelsehne d von c^6 gehört demnach ein Punkt D dieser Kerncurve, und umgekehrt (*Schur* a. a. O. S. 18); und zwar liegen die ∞^1 Punktentripel von c^6, welche mit D je ein Haupttetraeder von $|\Sigma_2$ bilden, in je einer durch d gehenden Ebene. Durch D gehen die Ebenen aller Kegelschnitte, welche mit d zusammen Ordnungscurven c^3 bilden; insbesondere gehen durch D die Ebenen der drei paar Doppelsehnen, welche d in je einem Punkte von c^6 schneiden (24.) In jeder durch D gehenden Ebene liegen i. A. fünf andere Punkte von c^6 auf einem Kegelschnitte, welcher mit d eine Ordnungscurve c^3 bildet und deshalb (6.) mit d einen Punkt gemein hat. Dreht sich die Ebene um eine Gerade d_1 von D, so beschreibt der Kegelschnitt eine durch c^6, d und d_1 gehende kubische Ordnungsfläche: dieselbe verbindet c^6 mit drei beliebigen Punkten von d_1 (vgl. 22.). Der Kegelschnitt kann zerfallen in eine beliebige andere Doppelsehne d_1 und eine mit d und d_1 incidente Sehne von c^6.

28. Durch einen beliebigen Punkt der Kerncurve c^6 gehen i. A. 18 Ebenen, welche je zwei Doppelsehnen derselben verbinden (25., 27.). In einem besonderen Falle aber schneidet jede solche Ebene die Kerncurve

in den Eckpunkten eines vollständigen Vierseits und enthält vier Doppelsehnen von c^6. Die Verbindungsebenen der Doppelsehnen bilden alsdann einen kubischen Ebenenbüschel*), und der Kerncurve können ∞^1 Fünfflache eingeschrieben werden, deren 10 Eckpunkte auf c^6 liegen und deren 10 Kanten aus Doppelsehnen von c^6 bestehen. Wir gehen auf diesen bei der Polarentheorie der kubischen Flächen auftretenden Specialfall hier nicht näher ein.

Die für uns wichtigsten *Specialfälle* des Raumbündels $|\Sigma_2|$ und des linearen Bündelcomplexes $|S_3|$ sind die folgenden.

28*a*. Wenn die collinearen Räume Σ, Σ_1, Σ_2 und damit alle Räume von $|\Sigma_2|$ einen Punkt P entsprechend gemein haben, so ist P Hauptpunkt aller Raumbüschel und Doppelpunkt von ∞^1 singulären Räumen des Raumbündels $|\Sigma_2|$; in P schneiden sich (13*b*.) homologe Strahlen aller Bündel von $|S_3|$, und P ist Mittelpunkt eines Netzes von ∞^2 dieser Bündel (19.). Die ∞^4 kubischen Ordnungscurven c^3 gehen folglich alle durch P, die ∞^3 Ordnungsflächen F^3 haben P zum Doppelpunkte (19.), und P ist dreifacher Punkt der Kerncurve c^6. Letztere wird aus P durch einen kubischen Ordnungskegel projicirt (19*c*., 23.). Der Ort der Doppelsehnen von c^6 zerfällt in diesen Kegel und eine Fläche fünfter Ordnung, welche c^6 zur Doppelpunktscurve hat. — In diesem Falle hängen Σ_2 und $|S_3|$ von 21 Parametern ab.

28*b*. Wenn beliebige drei und folglich alle Räume von $|\Sigma_2|$ eine Gerade l entsprechend gemein haben, so ist l Kante der Haupttetraeder aller Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ und enthält von ihnen je zwei Eckpunkte; der Ort der übrigen Eckpunkte ist eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung, welche mit l die Kerncurve c^6 bildet. Auf den Ebenenbüschel l reduciren sich die ∞^1 Bündel einer speciellen Reihe von $|S_3|$ (vgl. 21., 6*d*.). Durch l und c^5 gehen die ∞^3 kubischen Ordnungsflächen F^3; die ∞^4 Ordnungscurven c^3 haben mit l i. A. keine, mit c^5 aber je acht Punkte gemein (23.).

Zwei beliebige Ordnungsflächen F^3 schneiden sich (23.) in l, c^5 und einer kubischen Ordnungscurve c^3 und haben mit einer durch l gelegten Ebene ε noch zwei Kegelschnitte gemein. Letztere gehen durch die drei Schnittpunkte von c^3 und ε, und nur ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt liegt auf c^5. Die übrigen vier Schnittpunkte von c^5 und ε müssen alle auf l liegen, und l hat demnach mit c^5 vier Punkte gemein. — In diesem Falle hängen $|\Sigma_2|$ und $|S_3|$ von 20 Parametern ab.

---

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 82. S. 74 und 75.

28*c*. Wenn beliebige drei und folglich alle Räume von $|\Sigma_2|$ eine Ebene ε entsprechend gemein haben, so ist ε Hauptebene aller Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ und enthält je drei Hauptpunkte derselben. Der Ort dieser Hauptpunkte in ε ist eine kubische Curve c_1^3, die Ordnungscurve eines in ε liegenden Netzes homologer Felder der ∞^2 Räume von $|\Sigma_2|$ (vgl. 19*c*.). Die ∞^2 Congruenzen homologer Ebenenbüschel von $|\Sigma_2|$, deren Axen in ε liegen, erzeugen (6*c*.) ∞^2 Reihen perspectiver Bündel von $|S_3|$; die Mittelpunkte dieser Bündel liegen auf je einer Geraden s, und ε ist ihre Collineationsebene. Auf die Ebene ε reducirt sich ein Bündel von $|S_3|$, dessen Mittelpunkt beliebig in ε angenommen werden kann.

Die ∞^2 Netze homologer Bündel von $|\Sigma_2|$, deren Mittelpunkte in ε liegen, erzeugen (19*b*.) ∞^2 Flächen F^2 zweiter Ordnung, welche je ∞^2 Ordnungscurven c^3 enthalten und sich paarweise in einer der Geraden s, ausserdem aber alle in einer kubischen Raumcurve c_2^3 schneiden; letztere hat die ∞^2 Geraden s zu Sehnen. Die Kerncurve c^6 zerfällt in die beiden kubischen Curven c_1^3 und c_2^3, welche drei Punkte gemein haben. Jede der ∞^4 Ordnungscurven c^3 schneidet die Ebene ε in drei Punkten von c_1^3 und hat mit c_2^3 fünf Punkte gemein (23.). Der Ort der Doppelsehnen der Kerncurve zerfällt in die zweifache Ebene ε und eine Fläche sechster Ordnung durch c_1^3, welche c_2^3 zur dreifachen Curve hat. — In diesem Falle hängen $|\Sigma_2|$ und $|S_3|$ von 21 Parametern ab.

28*d*. Wenn beliebige vier und folglich alle Bündel des linearen Complexes $|S_3|$ durch eine Gerade s homologe Ebenen schicken, so ist s eine Sehne der ∞^4 Ordnungscurven c^3 und eine Hauptstrahl der ∞^3 Ordnungsflächen F^3; von dem Raumbündel $|\Sigma_2|$ aber reducirt sich ein Raum auf den Ebenenbüschel s, und die Kerncurve c^6 zerfällt in s und eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung. Die ∞^2 Bündel von $|S_3|$, welche irgend eine Ebene φ von s entsprechend gemein haben, bilden ein specielles Netz $|S_2|$, dessen Ordnungsfläche in φ und eine Regelfläche F^2 zweiter Ordnung zerfällt (19*b*.). Letztere geht durch c^5, und ihre eine Regelschaar $|g_1|$ besteht aus Doppelsehnen, die andere aus einfachen Sehnen von c^5. Die ∞^1 Doppelsehnen g von c^5 sind die Axen von Ebenenbüscheln, auf welche ∞^1 Bündel von $|S_2|$ sich reduciren (19*b*., 24.). Dreht sich die Ebene φ um s, so ändert sich allerdings das Netz $|S_2|$, doch geht es beständig durch die Reihe dieser ausgearteten Bündel.

Ueberhaupt wird die Regelfläche F^2, auf welcher die ∞^1 Doppel-

sehnen g von c^5 liegen, durch je drei eine Ebene von s enthaltende Bündel von $|S_3|$ erzeugt; sie verbindet als Bestandtheil von ∞^1 kubischen Ordnungsflächen (22., 19*b*.) ∞^1 Systeme homologer Punkte der Räume von $|\Sigma_2|$. Die Gerade s ist eine Sehne von c^5; denn eine beliebige Ordnungsfläche F^3 schneidet F^2 in c^5 und einer Doppelsehne g, dagegen die Ebene φ in s und einem Kegelschnitte, und da letzterer mit F^2 vier und mit c^5 höchstens drei Punkte gemein hat (weil einer der vier Punkte auf g liegt), so enthält s die übrigen beiden Schnittpunkte von c^5 und φ. — Die Zahl der Parameter dieser $|S_3|$ und $|\Sigma_2|$ ist 22.

28*e*. Wenn beliebige vier und folglich alle Bündel von $|S_3|$ eine Ebene φ entsprechend gemein haben, so zerfallen die ∞^3 Ordnungsflächen F^3 in φ und ∞^3 Regelflächen F^2 zweiter Ordnung (19*b*.). Letztere haben paarweise eine Gerade g gemein; denn die zugehörigen beiden Netze von $|S_3|$ haben eine specielle Bündelreihe gemein, deren Ordnungscurve in g und einen Kegelschnitt von φ zerfällt (6.). Die Regelflächen F^2 schneiden sich ausserdem alle in einer kubischen Raumcurve c_0^3, welche die Geraden g zu Sehnen hat, und durch deren Punkte je ∞^3 homologe Ebenen der Bündel von $|S_3|$ gehen. Die Kerncurve c^6 reducirt sich, abgesehen von der Ebene φ, auf diese kubische Raumcurve c_0^3.

Der lineare Complex $|S_3|$ besteht aus ∞^2 Reihen concentrischer Bündel, welche die Ebene φ und je eine Sehne g von c_0^3 entsprechend gemein haben; ∞^2 seiner Bündel reduciren sich auf Ebenenbüschel mit den Axen g (6.), und bilden, da die Reihen $|S_1|$ des Complexes je einen von ihnen enthalten, ein sehr specielles Netz $|S_2|$ von $|S_3|$. Die Haupttetraeder der ∞^2 Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ sind alle der Raumcurve c_0^3 eingeschrieben. Der Raumbündel $|\Sigma_2|$ enthält ∞^1 Büschel perspectiver Räume, welche φ zur Collineationsebene und je einen Punkt von c_0^3 zum Collineationscentrum haben (13*c*.), und einer seiner Räume reducirt sich auf die Ebene φ. — Diese $|S_3|$ und $|\Sigma_2|$ hängen von 17 Parametern ab.

28*f*. Haben beliebige vier und folglich alle Bündel von $|S_3|$ einen Strahl v entsprechend gemein, so reduciren sich ∞^1 Räume von $|\Sigma_2|$ auf den Ebenenbüschel v, und die übrigen haben jeden Punkt von v entsprechend gemein (13.); von $|S_3|$ arten folglich alle Bündel einer Reihe $|S_1|$ aus in den Büschel v. Die ∞^3 Ordnungsflächen werden alle geradlinig und haben v zur Doppelpunktsgeraden (19*a*.), die ∞^4 Ordnungscurven c^3 zerfallen in v und je zwei andere Gerade (6*a*.), die Kerncurve c^6 aber besteht aus der

dreifachen Geraden v (28*a.*) und einer kubischen Raumcurve c_1^3, welche v zur Sehne hat und aus jedem Punkte von v durch einen kubischen Ordnungskegel projicirt wird (vgl. 19*c.*). Die Bündel von $|S_3|$, welche irgend eine Ebene φ von v entsprechend gemein haben, bilden ein Netz, dessen Ordnungsfläche in φ und eine durch v gehende Regelfläche zweiter Ordnung zerfällt (19*b.*, 19*a.*); je zwei so erhaltene Regelflächen aber durchdringen sich in v und c_1^3. Die ∞^1 Kegel, welche c_1^3 aus den Punkten von v projiciren, gehören zu den Ordnungsflächen F^3; ihre ∞^2 Strahlen sind die Axen ausgearteter Bündel von $|S_3|$. Diese $|S_3|$ und $|\Sigma_2|$ hängen von 14 Parametern ab.

28*g.* Von Interesse ist noch der sehr specielle Fall, in welchem die Räume von $|\Sigma_2|$ ein Tetraeder entsprechend gemein haben und somit vier Bündel von $|S_3|$ auf die vier Tetraederflächen $\varkappa$ sich reduciren. In diesem Falle sind $|\Sigma_2|$ und $|S_3|$ durch die vier Ebenen $\varkappa$ völlig bestimmt und hängen von deren zwölf Parametern ab. Denn die Collineation der ∞^2 Räume von $|\Sigma_2|$ ist dadurch bestimmt, dass die vier Ebenen $\varkappa$ sich selbst, die ∞^2 Ebenen eines beliebigen Punktes S aber einander entsprechen; die ∞^3 Bündel von $|S_3|$ bestehen aus je ∞^2 homologen Ebenen dieser Räume. Die Kerncurve c^6 zerfällt (28*b.*) in die sechs Kanten des Tetraeders; jede Kante ist Axe einer Reihe ausgearteter Bündel von $|S_3|$. Die vier Eckpunkte des Tetraeders sind die Mittelpunkte singulärer Netze von $|S_3|$ und Schnittpunkte der ∞^4 kubischen Ordnungscurven c^3 (28*a.*); durch sie gehen je ∞^3 homologe Strahlen der Bündel von $|S_3|$.

Ein singuläres Netz $|S_2|$, von welchem drei Bündel in drei Ebenen ausarten, ist durch letztere bestimmt und von neun Parametern abhängig, wie analog sich ergiebt.

§ 6.

Gebüsche $|\Sigma_3|$ collinearer Räume.

29. Vier collineare Räume Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3, die nicht demselben Raumbündel angehören, bestimmen ein „Raumgebüsch" $|\Sigma_3|$. Zu demselben rechnen wir den Raumbündel $(\Sigma\Sigma_1\Sigma_2)$, sowie die ∞^3 collinearen Räume der ∞^2 Raumbüschel, welche Σ_3 mit den einzelnen Räumen dieses Bündels verbinden. Das Gebüsch $|\Sigma_3|$ enthält auch die ∞^2 Raumbündel, welche Σ_3 mit den Raumbüscheln von $(\Sigma\Sigma_1\Sigma_2)$ bestimmt, und folglich (21.) jeden durch zwei seiner Räume gehenden Raumbüschel, also auch jeden

durch drei derselben bestimmten Raumbündel (20.). Ueberhaupt ist das Gebüsch durch je vier seiner collinearen Räume, die in keinem Bündel liegen, ebenso bestimmt, wie durch jene ersten vier Räume.

30. Die homologen Ebenenbüschel der ∞^3 Räume von $|\Sigma_3|$ bilden ∞^4 lineare Büschelcomplexe, welche auf je einem Büschel $|T_1|$ collinearer Räume ruhen (8.). Die homologen Ebenen jener Räume bilden demgemäss die ∞^3 collinearen Räume T, T_1, T_2, ... eines zweiten, auf $|\Sigma_3|$ ruhenden Raumgebüsches $|T_3|$. Jedes der beiden sich stützenden Gebüsche enthält die ∞^4 Raumbüschel, welche durch je zwei, und die ∞^3 Raumbündel, welche durch je drei seiner collinearen Räume bestimmt sind, und ist nebst dem anderen durch beliebige vier seiner Räume bestimmt. Seine Raumbündel haben zu zweien einen Raumbüschel und zu dreien i. A. *einen* Raum gemein (vgl. 21.). Das allgemeine Raumgebüsch $|\Sigma_3|$ hängt von 33 Parametern ab; denn die Collineation der vier Räume Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 hängt von 45 Parametern ab (1.), aber das Gebüsch $|\Sigma_3|$ wird noch durch ∞^{12} andere Quadrupel collinearer Räume bestimmt (*Schur* a. a. O. S. 30).

31. Der Ort einer Ebene ε von Σ, welche mit den homologen Ebenen von Σ_1, Σ_2, Σ_3 und aller übrigen Räume von $|\Sigma_3|$ einen und denselben Punkt E gemein hat, ist eine Fläche vierter Klasse; denn durch eine Gerade u von Σ gehen i. A. vier solche Ebenen ε (11.). Die zu diesen vier ε gehörigen vier Punkte E sind die Hauptpunkte eines Raumbüschels von $|T_3|$ und des ihn stützenden linearen Complexes homologer Ebenenbüschel von $|\Sigma_3|$. Rechnen wir einen beliebigen Punkt P zu Σ_1, Σ_2 und Σ_3, so entsprechen ihm in Σ drei Punkte P', P'', P''', die nur dann mit P in einer Ebene ε liegen, wenn P ein Schnittpunkt E homologer Ebenen der ∞^3 Räume von $|\Sigma_3|$ ist.

Wenn nun P eine Gerade v durchläuft, so beschreiben P', P'', P''' drei zu v projective Punktreihen; die vier Punkte fallen demnach i. A. viermal in je eine Ebene ε (vgl. 11.), oder es giebt auf v i. A. vier Punkte E. Der Ort eines Punktes E, in welchem homologe Ebenen aller Räume von $|\Sigma_3|$ sich schneiden, ist somit eine Fläche K^4 vierter Ordnung, die „*Kernfläche*" der sich stützenden Gebüsche $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$. Uebrigens ist P auch dann ein Punkt E, wenn er Hauptpunkt des Raumbüschels $(\Sigma\Sigma_1)$ ist, also mit P' zusammenfällt, weil auch in diesem Falle P', P'' und P''' mit P in einer Ebene ε liegen; $(\Sigma\Sigma_1)$ aber ist als ein beliebiger Raumbüschel von $|\Sigma_3|$ anzusehen (29.).

32. Die Kernfläche K^4 der sich stützenden Raumgebüsche $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ ist also von der vierten Ordnung; sie ist den Haupttetraedern aller in $|\Sigma_3|$ oder $|T_3|$ enthaltenen Raumbüschel umschrieben (31.), und enthält somit die ∞^2 Doppelpunkte aller singulären Räume und die ∞^3 Kerncurven c^6 aller Raumbündel der Gebüsche (11., 23.). Sie wird erzeugt durch beliebige vier collineare Räume des einen oder des anderen Gebüsches, und ist der Ort der Punkte E, in denen je vier homologe Ebenen dieser Räume sich schneiden.

Weil die ∞^3 Raumbündel von $|\Sigma_3|$ resp. $|T_3|$ zu zweien einen Raumbüschel gemein haben (30.), so schneiden sich ihre Kerncurven zu zweien in den vier Hauptpunkten eines Raumbüschels von $|\Sigma_3|$ resp. $|T_3|$. Durch dieselben vier Punkte gehen übrigens ∞^1 Kerncurven von $|\Sigma_3|$ resp. $|T_3|$. Die beiden Kerncurven c^6 und k^6 beliebiger zwei Raumbündel $|\Sigma_2|$ und $|T_2|$ von resp. $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ können allemal durch eine kubische Fläche F^3 verbunden werden und haben demgemäss 14 Punkte gemein (*Schur* a. a. O., S. 29). Denn c^6 wird durch einen auf $|\Sigma_2|$ ruhenden Complex $|S_3|$ homologer Bündel von $|T_3|$ erzeugt (23.); zu den Räumen des Bündels $|T_2|$ aber gehören ∞^2 collineare Bündel von $|S_3|$, welche ein Netz bilden und jene durch c^6 und k^6 gehende Fläche F^3 erzeugen (vgl. 23.). Es giebt ∞^6 kubische „Ordnungsflächen“ von $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$, welche je eine Kerncurve dieser Raumgebüsche enthalten; zu ihnen gehören alle durch eine Kerncurve c^6 oder k^6 gehenden kubischen Flächen. Drei beliebige Punkte der Kernfläche K^4 können durch je eine Kerncurve der Raumgebüsche $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ verbunden werden; sie liegen nämlich mit jeder anderen Kerncurve auf einer Ordnungsfläche F^3 des zugehörigen Raumbündels (22.), diese F^3 aber schneidet K^4 in einer jener beiden Kerncurven.

33. Sei D ein Punkt der Kernfläche K^4, und c^6 eine durch ihn gehende Kerncurve von $|\Sigma_3|$. Dann gehört zu D eine Doppelsehne d von c^6 in der Weise, dass je drei Punkte D' von c^6, die mit D die vier Hauptpunkte eines Raumbüschels von $|\Sigma_3|$ bilden, mit d in einer Ebene liegen (27.); ausserdem gehen die ∞^2 kubischen Flächen F^3, welche c^6 mit je einem Strahle d_1 von D verbinden, alle durch d (27.). Diese Flächen schneiden K^4 in ∞^2 Kerncurven k^6 von $|T_3|$, welche je einen Strahl d_1 von D zur Doppelsehne haben und alle durch den vierten Schnittpunkt D_1 von d und K^4 gehen.

Je zwei der ∞^2 Flächen F^3 haben ausser c^6 und d einen Kegelschnitt

gemein, mit welchem ihre beiden Strahlen d_1 und deren Schnittpunkt D in einer Ebene liegen (27.); dieser Kegelschnitt aber enthält die drei von D_1 verschiedenen Schnittpunkte D_1' der beiden auf den F^3 liegenden Kerncurven k^6. Folglich gehen durch D die Ebenen von je drei Punkten D_1', die mit D_1 die vier Hauptpunkte eines Raumbüschels von $|T_3|$ bilden (32.), und damit auch alle zu D_1 gehörigen Doppelsehnen der ∞^2 Kerncurven k^6, welche den Punkt D_1 enthalten. Nach dem Vorhergehenden gehen ebenso durch D_1 die Ebenen von je drei Punkten D', welche mit D die vier Hauptpunkte eines Raumbüschels von $|\Sigma_3|$ bilden; und jede den Punkt D enthaltende Kerncurve c^6 von $|\Sigma|$ sendet ihre zu D gehörige Doppelsehne d durch den Punkt D_1. Die hierdurch gegebene eindeutige Transformation der Kernfläche K^4 in sich selbst hat zuerst Herr *Schur* (a. a. O. S. 30) allgemein nachgewiesen.

34. Von den *Specialfällen* der Raumgebüsche $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ heben wir folgende hervor. Wenn vier homologe Ebenen der collinearen Räume Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 in einer Geraden s sich schneiden, so gehen durch s homologe Ebenen aller ∞^3 Räume von $|\Sigma_3|$. Alle Kerncurven c^6 von $|\Sigma_3|$ haben sonach s zur Doppelsehne (24.), und s liegt auf der Kernfläche K^4. Von $|T_3|$ reducirt sich ein Raum auf den Ebenenbüschel s, und ∞^2 von den ∞^3 Kerncurven dieses Gebüsches zerfallen in s und je eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung (28*d*.). Letztere liegt auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung, die mit den Ebenen φ von s kubische Ordnungsflächen von $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ bildet (32., vgl. 28*d*.). Die ∞^1 Kerncurven von $|\Sigma_3|$, welche diese Ordnungsflächen mit K^4 gemein haben, zerfallen in eine kubische Raumcurve c_2^3 auf F^2 und ∞^1 in den Ebenen φ liegende Curven dritter Ordnung (28*c*.). Die ∞^2 Raumcurven c^5 liegen mit c_2^3 auf je einer Fläche zweiter Ordnung. — Diese speciellen Gebüsche hängen von 31 Parametern ab.

34*a*. Senden beliebige vier und folglich alle Räume von $|\Sigma_3|$ durch einen Punkt D homologe Strahlen, so haben ∞^1 singuläre Räume von $|T_3|$ diesen Punkt zum Doppelpunkt. Zugleich aber senden alle Räume von $|T_3|$ durch D homologe Strahlen, wie leicht sich ergiebt, wenn man $|T_3|$ durch zwei jener singulären und zwei andere Räume bestimmt. Die Kernfläche K^4 und je ∞^1 singuläre Räume beider Gebüsche haben D zum Doppelpunkt; alle Kerncurven von $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ gehen durch D, und ∞^1 derselben haben D zum dreifachen Punkt (28*a*.). Diese speciellen Gebüsche hängen von 30 Parametern ab.

34*b*. Wenn die ∞^3 Räume von $|\Sigma_3|$ einen Punkt P entsprechend gemein haben, so reduciren sich auf den Ebenenbündel P die Räume eines Raumbündels $|T_2|$ von $|T_3|$. Weil aber die Raumbüschel von $|T_3|$ je einen dieser singulären Räume enthalten (30.), so ist P ein gemeinsamer Hauptpunkt derselben; auch die ∞^3 Räume von $|T_3|$ haben folglich den Punkt P entsprechend gemein (11.). Die ∞^2 Kerncurven c^6 und k^6 von $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ haben P zum dreifachen Punkte und werden paarweise aus ihm durch kubische Kegel projicirt (28*a*.). Die übrigen ∞^6 kubischen Ordnungsflächen (32.) und die Kernfläche K^4 haben P zum Doppelpunkte und werden in P von den Strahlen eines und desselben Kegels zweiter Ordnung osculirt. — Diese Gebüsche hängen von 27 Parametern ab.

34*c*. Haben die ∞^3 Räume von $|\Sigma_3|$ eine Ebene ε entsprechend gemein, so reducirt sich auf ε ein Raum von $|T_3|$. Die ∞^3 Kerncurven c^6 von $|\Sigma_3|$ zerfallen dann (28*c*.) in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3, von denen c_1^3 in ε liegt und c_2^3 eine Raumcurve ist. Die ∞^2 Raumbündel $|T_2|$ von $|T_3|$, welche den singulären Raum ε enthalten, haben abgesehen von φ je eine kubische Kerncurve c_0^3 (28*e*.). Jede c_0^3 kann mit jeder c_2^3 durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche mit ε zusammen eine kubische Ordnungsfläche bildet (32.). Die Kernfläche K^4 zerfällt in ε und eine kubische Fläche, welche alle Kerncurven k^6 von $|T_3|$ enthält und auf welcher die kubischen Raumcurven c_0^3 und c_2^3 zwei zusammengehörige Curvennetze bilden (vgl. 17.). Auch diese Gebüsche hängen von 27 Parametern ab.

34*d*. Wenn die Räume von $|\Sigma_3|$ eine Gerade l entsprechend gemein haben, so reduciren sich auf den Ebenenbüschel l die Räume eines Raumbüschels $|T_1|$ von $|T_3|$. Nun haben aber die ∞^3 Raumbündel von $|T_3|$ je einen singulären Raum mit $|T_1|$ gemein (30.), und ∞^1 von ihnen gehen durch $|T_1|$. Die ∞^3 Kerncurven k^6 von $|T_3|$ zerfallen deshalb (28*d*.) in l und ∞^3 Raumcurven k^5 fünfter Ordnung, welche mit ihren Doppelsehnen auf je einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und ∞^1 von ihnen bestehen aus je einer kubischen Raumcurve c_1^3 und der dreifachen Geraden l, welche von c_1^3 eine Sehne ist (28*f*.). Andererseits zerfallen die ∞^3 Kerncurven c^6 von $|\Sigma_3|$ in l und ∞^3 Raumcurven c^5 fünfter Ordnung, welche mit l je vier Punkte gemein haben (28*b*.), und ∞^1 von ihnen bestehen aus je einer kubischen Raumcurve c^3, der Geraden l und einem Kegelschnitte, der mit l in einer Ebene liegt (28*c*.). Die Kernfläche K^4 hat l zur Doppelpunkts-

geraden; sie wird von den Ebenen des Büschels l in je einem Kegelschnitte und von ∞^2 Flächen zweiter Ordnung in l und je zwei kubischen Raumcurven c^3 und c_1^3 geschnitten (vgl. 32.). Diese Raumgebüsche hängen von 25 Parametern ab.

34*e*. Wenn die Räume von $|\Sigma_3|$ ein Tetraeder entsprechend gemein haben, oder vier Räume von $|T_3|$ auf die vier Tetraederflächen $\varkappa$ sich reduciren, so sind beide Raumgebüsche durch die vier Ebenen $\varkappa$ völlig bestimmt und hängen von deren 12 Parametern ab. Denn die Collineation der ∞^3 Räume Σ, Σ_1, Σ_2, ... von $|\Sigma_3|$ ist dadurch bestimmt, dass jede der vier Ebenen $\varkappa$ sich selbst, einer beliebigen fünften Ebene von Σ aber in jedem der anderen Räume eine der ∞^3 übrigen Ebenen entspricht. Da auch die Räume von $|T_3|$ das Tetraeder, insbesondere jeden Eckpunkt desselben (34*b*.), entsprechend gemein haben, so sind $|\Sigma_3|$ und $|T_3|$ identisch. Die Kernfläche K^4 zerfällt in die vier Ebenen $\varkappa$.

Strassburg i. E., den 30. Mai 1888.

Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung *).

(Von Herrn *P. du Bois-Reymond.*)

Capitel I.

Vorbemerkungen.

Wir werden uns in diesen Untersuchungen mit den verschiedenen Lösungsformen der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1.)\quad F(z) \equiv Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0$$

beschäftigen, in der p, q, r, s, t, wie üblich, die ersten und zweiten Differentialquotienten von z bedeuten, und Z, P, Q, R, S, T Functionen von x und y vorstellen, die selbst und deren Differentialquotienten, wenigstens bis zu der Ordnung, in welcher sie in unseren Rechnungen zum Vorschein kommen werden, und in den von uns zu Grunde gelegten Gebieten, der Variabeln x und y eindeutig und stetig sind. Die Veränderlichen werden zunächst alle reell angenommen. Integraloberfläche der Gleichung $F = 0$ soll jede eine Lösung $z = f(x, y)$ der Gleichung $F = 0$ verbildlichende Fläche genannt werden.

*) In diesen Mittheilungen beabsichtige ich eine kurze Uebersicht dessen zu geben, was das zweite Heft meiner „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen" enthalten sollte. Einiges über den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes ist schon bekannt gemacht. So namentlich habe ich am Schlusse des ersten Heftes meiner „Beiträge etc." eine Verallgemeinerung der *Riemann*schen Integrationsmethode der Schalldifferentialgleichung für endliche Schwingungsweiten gegeben. Weiter habe ich in einer Vorlesung in Tübingen, die einige Verbreitung gefunden, den wesentlichen Inhalt der Cap. IV und V etc. dieser Abhandlung vorgetragen, und in einer Note im ersten Heft der Math.-naturw. Mittheil. des Herrn *Böklen* in Reutlingen ist Manches aus den Cap. II und III angeführt. Herr Dr. *Albert Schwarz* beabsichtigte das in der erwähnten Vorlesung aus den Cap. IV und V etc. über die Reduction der partiellen Differentialgleichungen und das Hauptintegral der hyperbolischen Differentialgleichungen Vorgetragene mit Zusätzen zu seiner Dissertation zu benutzen, doch fand keine Einigung zwischen uns statt. In der Dissertation, welche später (1887) ohne meine Mitwirkung gedruckt wurde und seine Promotion perfect machte, ist der das Hauptintegral betreffende Theil unterdrückt. Was darin die Reduction betrifft, so ist sie nicht durchweg correct, so dass sie hier in extenso ausgeführt wird.

1.

Um zunächst einen Begriff zu gewinnen von dem, was die Gleichung $F = 0$ an einer Integraloberfläche willkürlich lassen kann, nehmen wir auf ihr eine Curve C an, deren Bogenelementprojectionen dx, dy, dz seien. Sie werden genügen müssen den Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} 2_1) & dz = p\,dx + q\,dy, \\ 2_2) & \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy, \end{cases} \\ 2_3) & \begin{cases} dr = z_0^3 dx + z_1^3 dy \\ ds = z_1^3 dx + z_2^3 dy \\ dt = z_2^3 dx + z_3^3 dy, \end{cases} \\ 2_4) & \begin{cases} dz_0^3 = z_0^4 dx + z_1^4 dy \\ \text{etc.}, \end{cases} \end{cases}$$

wo $z_m^n = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-m}\partial y^m}$. Die vier dritten Differentialquotienten müssen sodann den Gleichungen genügen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv z_0^3 R + z_1^3 S + z_2^3 T + \Xi = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv z_1^3 R + z_2^3 S + z_3^3 T + H = 0. \end{cases}$$

in denen

$$(4.)\quad \begin{cases} \Xi = r(R_x + P) + s(S_x + Q) + tT_x + p(P_x + Z) + qQ_x + zZ_x, \\ H = rR_y + s(S_y + P) + t(T_y + Q) + pP_y + q(Q_y + Z) + zZ_y, \end{cases}$$

indem man z. B. R_x für $\frac{\partial R}{\partial x}$ schreibt.

Setzt man aus den Gleichungen (2_2.) die Werthe von r und t in $F = 0$ ein, so folgt:

$$(5.)\quad R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2) + \Pi\,dx\,dy = 0,$$

wo

$$(6.)\quad \Pi = Pp + Qq + Zz.$$

Ebenso erhält man aus den Gleichungen (2_3.) und den Gleichungen (3.):

$$(7.)\quad \begin{cases} R\,dr\,dy + T\,ds\,dx + z_1^3(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2) + \Xi\,dx\,dy = 0, \\ R\,ds\,dy + T\,dt\,dx + z_2^3(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2) + H\,dx\,dy = 0, \end{cases}$$

aus denen durch Multiplication mit dx resp. dy und Addition $dF = 0$ sich ergiebt.

Wir haben also zur Bestimmung von zunächst z, p, q, r, s, t längs

der Curve C, deren xy-Projection als beliebig gewählt vorausgesetzt wird, die vier Relationen

$$(8.)\quad dz = pdx+qdy,\quad dp = rdx+sdy,\quad dq = sdx+tdy,\quad F = 0,$$

und keine weiter, denn $dF = 0$ ist blosse Folge von $F = 0$.

Mithin bleiben jedenfalls zwei von den Grössen z, p, q, r, s, t längs der Curve C willkürlich. Verfügt man über irgend zwei dieser Grössen nach Belieben, so folgen die übrigen direct oder durch Integration. Nimmt man z. B. z und p willkürlich an, so folgen die Grössen q, r, s, t aus den vorstehenden Gleichungen (8.) ohne Weiteres. Nimmt man p und q willkürlich an, so ist zur Bestimmung von z eine Quadratur erforderlich, die *einen* Werth von z auf der Curve C unbestimmt lässt, der also ebenfalls willkürlich ist. Die weiteren Differentialquotienten von z_0^3 an folgen gleichfalls aus jenen Daten, z. B. die vier dritten Differentialquotienten aus der Gleichung (2_3.) und einer der Gleichungen (3.), denn die andere giebt mit ihr combinirt $dF = 0$.

Um uns hier an die erste und einfachste Annahme zu halten, dass z und eine der Grössen p, q willkürlich gedacht wird, kann man sagen, *dass längs einer beliebigen Curve C die Ordinate z und die Tangentialebene der Integraloberfläche zur Verfügung stehen.*

Doch gilt dies nur im Allgemeinen. Streng genommen kann man nur sagen, dass längs einer Curve C *nicht mehr* als zwei von den Grössen z, p, q etc. willkürlich sein können, denn es können auch weniger willkürlich sein. Bei Curven von geeigneter Projection bleibt nämlich nur *eine* verfügbar.

Denn aus den Gleichungen (5.) und (7.) fallen die Differentialquotienten s, z_1^3 und z_2^3 heraus, wenn als Differentialgleichung der willkürlichen Curve C diese:

$$(9.)\quad Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2 = 0$$

gewählt wird. Zerlegt man diese Gleichung in die Factoren:

$$(dy-N_+dx)(d_1y-N_-d_1x) = 0,$$

wo

$$(10.)\quad N_\pm = \frac{1}{2R}\{S\pm\sqrt{S^2-4RT}\},$$

so gehören die Gleichungen

$$(11.)\quad dy-N_+dx = 0,\quad d_1y-N_-d_1x = 0$$

zweien Curvenschaaren an, welche sich kreuzen in jedem Punkte der xy-Ebene, für den $S^2-4RT>0$. Wenn wir die Gleichungen (2.) und (5.) einmal auf die eine Schaar, einmal auf die andere Schaar beziehen (was wir dadurch unterscheiden wollen, dass wir die Differentiale d einmal d und das andere Mal d_1 schreiben) und dy und d_1y aus ihnen mit Hülfe der Gleichungen (11.) eliminiren, so werden sie:

$$(12.)\quad \begin{cases} dz = dx(p+N_+q), & d_1z = d_1x(p+N_-q), \\ dp = dx(r+N_+s), & d_1p = d_1x(r+N_-s), \\ dq = dx(s+N_+t), & d_1q = d_1x(s+N_-t), \\ dp+N_-dq+\Pi dx = 0, & d_1p+N_+d_1q+\Pi d_1x = 0, \\ dr+N_-ds+\Xi dx = 0, & d_1r+N_+d_1s+\Xi d_1x = 0, \\ ds+N_-dt+Hdx = 0, & d_1s+N_+d_1t+Hd_1x = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Systeme lassen sich in's Unbegrenzte fortsetzen *). In beiden Systemen bilden die erste und vierte Gleichung zusammen je ein System für sich, das ausser x nur die Grössen z, p, q enthält.

Denkt man sich die Differentialgleichungen $dy = N_+dx$, $d_1y = N_-dx$ integrirt, und die Integrale $\psi(x,y) = c$, $\psi_1(x,y) = c_1$ so geschrieben:

$$(13.)\quad x = \lambda(c,c_1), \quad y = \mu(c,c_1),$$

so kann man die Differentiale d durch $\frac{\partial}{\partial c}dc$, d_1 durch $\frac{\partial}{\partial c_1}dc_1$ ersetzen.

Die beiden Curvenschaaren, welche der Gleichung (9.):

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdy^2 = 0$$

oder den Differentialgleichungen (11.) genügen, sind die Projectionen der ***Charakteristiken*** der partiellen Differentialgleichung $F=0$, aber die Projectionen selbst werden der Kürze halber häufig Charakteristiken genannt.

2.

Zwischen den Systemen (2.), die für eine beliebige Curve gelten, und den Systemen (12.), die einer sogenannten Charakteristik zukommen, besteht also der sehr wichtige Unterschied, dass, wenn man das erste irgendwo abbricht, immer zwei von den darin auftretenden Grössen z, p, q, r, ... ohne Bestimmung bleiben, während die Systeme (12.) deren nur eine unbestimmt

---

*) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen, § 90.

lassen. Beschränken wir uns z. B. auf die Differentialgleichungen der Systeme (12.), welche nur z, p, q enthalten:

$$(14.)\quad \begin{cases} dz = dx(p+N_+q), & d_1z = d_1x(p+N_-q), \\ dp+N_-dq+dx(Pp+Qq+Zz)=0, & d_1p+N_+d_1q+d_1x(Pp+Qq+Zz)=0, \end{cases}$$

so wird jedes ein vollständiges System von Differentialgleichungen, wenn man *eine* der Grössen z, p, q nach Willkür annimmt und einsetzt. Dies ist der charakteristische Unterschied zwischen den Curven:

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2 = 0$$

und allen übrigen in der xy-Ebene.

Andererseits muss jedes der Systeme (14.) unvollständig sein und bleiben, denn aus der Differentialgleichung lässt sich nichts weiter schliessen, um es vollständig zu machen.

Es knüpft sich hieran die weitere Frage, ob und wie weit die Integraloberfläche bestimmt ist durch die Verfügung über die in einer Curve unbestimmt bleibenden Grössen. Ich habe diesen Gegenstand in meinen „Beiträgen zur Interpretation etc." auch für nichtlineare Differentialgleichungen erörtert mit Hülfe von Constructionen *de proche en proche,* und eines eigenthümlichen Variationsverfahrens. Ich wurde zu dem Satze geführt, dass durch Verfügung über z und die zu z gehörige Tangentialebene längs eines gegebenen Curvenstücks die Integraloberfläche bestimmt ist, und zwar innerhalb eines krummlinigen Vierecks, dessen eine Diagonale das Curvenstück ist und dessen Seiten Charakteristiken sind, die ich in dieser Eigenschaft *spontane Grenzen* nannte. Wenn meine Ausführungen wohl noch genauerer Darstellung fähig sind, so sehe ich doch nicht ab, wie man bei nichtlinearen Differentialgleichungen das Problem anders in Angriff nehmen könnte. Der vollständigen Durchführung der geometrischen Construction *de proche en proche* fiele allerdings noch die Aufgabe zu, zu zeigen, dass die zwischen Paaren unendlich naher Curven C und C', C' und C'' construirten Flächenstreifen solche Winkel einschliessen, bei denen die Construction bis in endliche Ferne von der ursprünglichen Curve C möglich ist. Weiter auch wäre, und das ist der wichtigste Punkt, der Unterschied der Construction bei reellen und imaginären Charakteristiken

$$S^2-4RT \gtrless 0$$

festzustellen, *da doch in Bezug auf die in Rede stehenden Grenzbedingungen Differentialgleichungen mit reellen und imaginären Charakteristiken himmelweit*

verschieden sich verhalten. Denn während bei positiven Charakteristiken die Variation des obigen Curvenstückes nur innerhalb des Charakteristikenvierecks, dessen Diagonale es ist, die Integraloberfläche verändert, so hängt bei imaginären Charakteristiken die ganze Integraloberfläche von jeder noch so kleinen Portion des Curvenstückes ab. Doch halten wir uns hier an den Fall reeller Charakteristiken. Nun, zwischen irgend welchen anderen Curven und den Charakteristiken findet in Bezug auf das Bestimmtsein der Integraloberfläche durch Verfügung über die unbestimmten Grössen in der Curve folgender Gegensatz statt. ***Während diese Verfügung bei den Curven im Allgemeinen die Integraloberfläche bestimmt, thut sie es bei den Charakteristiken nicht, sondern die Integraloberflächen, welche eine Charakteristik passiren, lassen noch eine von einer willkürlichen Function abhängige Mannigfaltigkeit zu,*** ganz ähnlich wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung, nur dass bei diesen nicht schon in der Charakteristik eine willkürliche Function steckt. Zwischen den partiellen Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung findet auch eine weitere Analogie statt in Bezug auf den Durchgang ihrer Integraloberflächen durch ihre Charakteristiken. ***Sämmtliche eine Charakteristik passirenden Integraloberflächen einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung osculiren sich darin, oder haben doch die Tangentialebenen gemein (Beiträge etc. § 91), während bei den linearen Differentialgleichungen sie auch diese nicht gemein zu haben brauchen,*** ein Verhalten, welches ganz ähnlich dem entsprechenden bei Differentialgleichungen erster Ordnung ist. Um es bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung etwas genauer zu beleuchten, gehen wir vom ersten System (14.)

$$\begin{aligned} dz &= dx(p+N_+ q), \\ dp+N_- dq+dx(Pp+Qq+Zz) &= 0 \end{aligned}$$

aus. Wir denken es uns durch feste Annahme über z vollständig gemacht und setzen $p+\varDelta p$, $q+\varDelta q$ statt p und q. Aus den Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} \varDelta p+N_+\varDelta q = 0, \\ d\varDelta p+N_- d\varDelta q+dx(P\varDelta p+Q\varDelta q) = 0, \end{cases}$$

die man so erhält, geht hervor, dass $\varDelta p$ und $\varDelta q$ nicht unendlich klein zu sein brauchen, und dass sie bis auf *eine* Constante längs einer Charakteristik bestimmt sind. Dies will sagen, dass, unter ω und ω_0 die Winkel der Tangentialebenen zweier eine Charakteristik passirenden Integraloberflächen

an zwei Punkten x, y, z und x_0, y_0, z_0 dieser Charakteristiken verstanden, ω und ω_0 durch die Lagen der zwei Punkte gegeben sind. Das Verhalten ist eben ein anderes, wenn die Gleichungen des Systems (14.) in p und q nicht linear sind, oder wenn gar, wie dann in den meisten Fällen, die zweiten Gleichungen des Systems (14.) nicht vorhanden sind*).

Jedes der Systeme (14.) wird ausnahmslos eine der Grössen z, p, q unbestimmt lassen. Das hindert aber nicht, dass es eine Relation der Form

$$\lambda z + \lambda_1 p + \lambda_2 q = \text{constans}$$

zwischen ihnen gestatten kann, die dann leicht zur Integration der Differentialgleichung führt, übrigens zwischen den Coefficienten der Gleichung $F = 0$ die Bedingung ergiebt, unter der sie auf Quadraturen führt. Man kann noch, indem man auf die Systeme (12.) zurückgeht, weitere Integrale voraussetzen, wodurch man andere Bedingungen zwischen den Coefficienten erhalten würde. Auch kann man die zweiten Gleichungen (14.) als *Pfaff*sche Gleichungen mit vier Variabeln und zwei Integralen ansehen, was ebenfalls auf Integrationen führt. Endlich ist zu bemerken, dass eines der Systeme (14.) in zwei Fällen vollständig werden könnte. Entweder erstens, wenn noch eine Gleichung hinzugefügt werden könnte, die eine unbestimmte Function derart in expliciter Form enthielte, dass sie der ganzen Schaar Charakteristiken der einen Art angehörte, oder zweitens, wenn noch eine Relation hinzuträte, welche aus den Integraloberflächen eine Gruppe heraushebt. Ich beabsichtige auf diese Dinge gelegentlich zurückzukommen.

In den vorliegenden Untersuchungen ist es mir indessen mehr an den verschiedenen *Lösungsformen* der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für verschiedene Bedingungen gelegen.

Wenn nämlich, wie ich bemerkte, für die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen schwerlich eine andere Methode zur Beurtheilung ihrer Lösungsformen besteht, als die von mir in meinen Beiträgen benutzte der Variation und der Construction *de proche en proche,* so bietet sich bei den linearen der Form $F = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0$ eine weitere äusserst bequeme und fruchtbare dar; es ist die Multiplicatormethode, die schon so mannigfacher Anwendungen sich erfreut, und auf deren durch *Riemann* uns gelehrte Verwendung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ich auch schon in den letzten Paragraphen meiner Beiträge

*) Beiträge etc., pag. 191.

hinwies. So liegt es denn nahe, diese Methode thunlich auszubeuten, um aus ihr über die Lösungsformen wenigstens der linearen Differentialgleichungen die umfangreichste Belehrung zu schöpfen. Die so erworbenen Kenntnisse werden uns bei den nichtlinearen Differentialgleichungen mutatis mutandis gewiss nützlich sein. Doch öffnet sich bei den linearen Gleichungen schon ein so unabsehbar weites Feld, dass, je mehr man darin vordringt, die noch allgemeineren und verwickelteren Aufgaben an Interesse einbüssen.

Wir müssen unter den Grenzbedingungen die *einläufigen* oder die reinen *Curvenbedingungen* und die *Curvenflächenbedingungen* unterscheiden. Bei den ersteren sind zur Bestimmung der Integraloberfläche willkürliche Elemente nur in einem Linienstück festzulegen. Die zweiten enthalten Bedingungen auch für das Innere der Integraloberfläche, und zwar meistens Stetigkeitsbedingungen. Namentlich die zweite Art der Bedingungen ist mannigfachster Art. Wir werden, nach Erledigung einiger Allgemeinheiten, mit den einläufigen Grenzbedingungen den Anfang machen.

Capitel II.

Die Multiplicatorgleichung.

3.

Es sei $F(z) = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung beliebiger $m$ter Ordnung zwischen der Function z und ihren Argumenten, den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$. Bildet man das Product $\zeta F(z)$, wo ζ eine neue Function der x, so erhält man durch partielle Integration:

$$(16.)\qquad \int \zeta F(z)dx_1 \ldots dx_n = U + \int z\Phi(\zeta)dx_1 \ldots dx_n,$$

wo U nur Integrale niederer als der $m$ten Ordnung enthält. Man nennt $\Phi(\zeta) = 0$ die Multiplicatorgleichung von $F(z) = 0$. Ist z. B.:

$$F(z) \equiv Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0,$$

so findet man:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Phi(\zeta) \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(R\zeta) + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(S\zeta) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(T\zeta) - \dfrac{\partial}{\partial x}(P\zeta) - \dfrac{\partial}{\partial y}(Q\zeta) + Z\zeta \\ \qquad = R\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + S\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y} + T\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}(2R_x + S_y - P) + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}(2T_y + S_x - Q) \\ \qquad\qquad + \zeta(R_{xx} + S_{xy} + T_{yy} - P_x - Q_y + Z) = 0. \end{cases}$$

Ich will an dieser Stelle noch einige Formeln anführen, die bisweilen nützlich sind. Setzt man

$$(18.)\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{(S\zeta)_x}{2}+(T\zeta)_y-\zeta Q, \\ M_2 = -\dfrac{(S\zeta)_y}{2}-(R\zeta)_x+\zeta P, \\ \text{so ist} \\ \Phi(\zeta) = \dfrac{\partial M_1}{\partial y}-\dfrac{\partial M_2}{\partial x}+Z\zeta, \end{cases}$$

weiter, wenn:

$$(19.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_1 = \dfrac{(Sz)_x}{2}+(Tz)_y-z(2T_y+S_x-Q), \\ \mathfrak{M}_2 = -\dfrac{(Sz)_y}{2}-(Rz)_x+z(2R_x+S_y-P), \\ \text{so ist} \\ F(z) = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial x}+z(R_{xx}+S_{xy}+T_{yy}-P_x-Q_y+Z). \end{cases}$$

Wenn die Coefficienten von ζ resp. z Null sind, so sind M_1dx+M_2dy, resp. $\mathfrak{M}_1dx+\mathfrak{M}_2dy$ vollständige Differentiale.

Zwischen den Aggregaten $F(z)$ und $\Phi(\zeta)$ in (16.) bestehen mannigfache mehr oder weniger allgemeine Beziehungen, von denen wir hier einige hervorheben wollen.

I. *Wenn $\Phi(\zeta) = 0$ die Multiplicatorgleichung von $F(z)$ ist, so ist $F(z)$ die Multiplicatorgleichung von $\Phi(\zeta)$.*

Wir setzen wie in (16.)

$$\int \zeta F(z)dx_1\dots dx_n = U+\int z\Phi(\zeta)dx_1\dots dx_n.$$

Weiter ist:

$$\int z\Phi(\zeta)dx_1\dots dx_n = U_1+\int \zeta\Phi_1(z)dx_1\dots dx_n,$$

wo U_1 wiederum aus Integralen niederer als der $n$ten Ordnung zusammengesetzt ist, und $\Phi_1(z) = 0$ die Multiplicatorgleichung von $\Phi(\zeta) = 0$ ist. Es muss also nach gewissen Principien der Variationsrechnung in der That:

$$\Phi_1(z) = F(z)$$

sein. Ebenso leicht beweist man folgenden besonders nützlichen Satz:

II. *Wenn wiederum $\Phi(\zeta) = 0$ die Multiplicatorgleichung von $F(z) = 0$ vorstellt, so ist:*

$$(20.)\quad (-1)^m\Phi\Big(\frac{\partial^m\zeta}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}}\Big) = 0$$

die Multiplicatorgleichung von

$$(21.)\qquad \frac{\partial^m F}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}} = 0.$$

Man erhält zunächst durch partielle Integration von

$$\int \zeta \frac{\partial^m F}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}} dx_1\dots dx_n$$

einen Ausdruck

$$U+\int(-1)^m \frac{\partial^m \zeta}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}} dx_1\dots dx_n,$$

wo U nur Integrale niederer als der $n$ten Ordnung enthält. Bei erneuter partieller Integration bleibt eben

$$(-1)^m \Phi\Big(\frac{\partial^m \zeta}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}}\Big)$$

als Factor von z unter dem Integral $n$ter Ordnung zurück.

Somit ist z. B.

$$(22.)\qquad \Phi\Big(\zeta-\frac{\partial\lambda\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\mu\zeta}{\partial y}+\frac{\partial^2\varrho\zeta}{\partial x^2}+\text{etc.}\Big) = 0$$

die Multiplicatorgleichung von

$$F+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial F}{\partial y}+\varrho\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\text{etc.} = 0.$$

Man kann noch fragen: *Wenn mit $F^{(\xi)}(z)$ bezeichnet wird, was aus $F(z)$ hervorgeht durch Substitution der Variabeln $\xi_1, \dots \xi_n$ an Stelle der $x_1, \dots x_n$, welches ist die Multiplicatorgleichung $\Phi^{(\xi)}(\zeta)$ von $F^{(\xi)}(z)$?* Nun ist

$$\int\zeta F(z)dx_1\dots dx_n = \int\zeta F^{(\xi)}(z)\Delta_\xi^x . d\xi_1\dots d\xi_n,$$

wo Δ_ξ^x die Functionsdeterminante der x nach den ξ.

Weiter hat man

$$\int z\Phi(\zeta)dx_1\dots dx_n = U+\int\Phi^{(\xi)}(\zeta\Delta_\xi^x).z.\Delta_x^\xi dx_1\dots dx_n,$$

wo U nur Integrationen niederer als der $n$ten Ordnung enthält. Mithin ist:

$$(23.)\qquad \Phi^{(\xi)}(\zeta\Delta_\xi^x) = \Delta_\xi^x\Phi(\zeta).$$

In $\Phi(\zeta)$ sind die Differentialquotienten nach den x genommen, in $\Phi^{(\xi)}(\zeta)$ nach den ξ. Nimmt man sie rechts auch nach den ξ, und setzt für $\zeta\Delta_\xi^x$ einen neuen Buchstaben ein, so ist die neue Multiplicatorgleichung auf die alte zurückgeführt.

IV. Falls $F(z)$ durch die Substitution $z = uz_1$ übergeht in $F^{(u)}(z_1)$, ist $\frac{1}{u}\Phi(\zeta) = 0$ die Multiplicatorgleichung von $F^{(u)}(z_1)$.

4.

V. Ein letzter Satz über Multiplicatorgleichungen, der noch hierher gehört, ist viel beschränkter als die bisherigen.

Sieht man sich die Multiplicatorgleichung

$$\Phi(\zeta) = \frac{d^2\zeta u}{dx^2} - \frac{d\zeta u}{dx} + \zeta w = 0$$

einer ***gewöhnlichen*** Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(z) = u\frac{d^2z}{dx^2} + v\frac{dz}{dx} + wz = 0$$

näher an, so zeigt es sich, dass die erste Gleichung in die zweite übergeht, wenn man darin $\zeta = \gamma z$ setzt, wo

$$\gamma = \text{const.}\frac{1}{u}e^{\int\frac{v}{u}dx}.$$

Dann hat man also identisch:

$$\Phi(\gamma z) = \gamma F(z).$$

Um zu sehen, was aus diesem Satze bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird, setzen wir in

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta R) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta S) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta T) - \frac{\partial}{\partial x}(\zeta P) - \frac{\partial}{\partial y}(\zeta Q) + \zeta Z = 0$$

$\gamma\zeta''$ statt ζ. Dies giebt:

$$(24.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \zeta''_{xx}.\gamma R + \zeta''_{xy}.\gamma S + \zeta''_{yy}.\gamma T \\ +\zeta''_x(2(\gamma R)_x + (\gamma S)_y - \gamma P) \\ +\zeta''_y(2(\gamma T)_y + (\gamma S)_x - \gamma Q) \\ +\zeta''((\gamma R)_{xx} + (\gamma S)_{xy} + (\gamma T)_{yy} - (\gamma P)_x) - (\gamma Q)_y + \gamma Z) \;=\; 0, \end{cases}$$

wo die Differentiationen einfach durch Indices angegeben sind. Die Coefficienten von ζ'' und seiner Differentialquotienten hat man successive gleich γZ, γQ, γP, γT, γS, γR zu setzen, wodurch man die Gleichungen erhält:

$$(25.)\quad \begin{cases} 2(\gamma R)_x + (\gamma S)_y \;=\; 2\gamma P, \\ 2(\gamma T)_y + (\gamma S)_x \;=\; 2\gamma Q, \\ (\gamma R)_{xx} + (\gamma S)_{xy} + (\gamma T)_{yy} - (\gamma P)_x - (\gamma Q)_y \;=\; 0. \end{cases}$$

Hier ist die dritte Gleichung eine Folge der beiden ersten, die also allein übrig bleiben. Sie geben:

$$(26.)\quad \begin{cases} \frac{\partial l\gamma}{\partial x}(S^2-4RT) = S(2Q-2T_y-S_x)-2T(2P-2R_x-S_y), \\ \frac{\partial l\gamma}{\partial y}(S^2-4RT) = S(2P-2R_x-S_y)-2R(2Q-2T_y-S_x). \end{cases}$$

Bezeichnen wir die hierin enthaltenen Werthe von $\frac{\partial l\gamma}{\partial x}$ und $\frac{\partial l\gamma}{\partial y}$ durch G und H, so hat man also die Bedingung, dass

$$Gdx+Hdy$$

ein vollständiges Differential sei, und dann ist der gesuchte Factor γ

$$\text{const. } e^{\int(Gdx+Hdy)}.$$

Man erhält so den Satz:

Wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(27.)\quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

wo

$$(28.)\quad \begin{cases} G = \frac{1}{\varDelta}[S(2Q-2T_y-S_x)-2T(2P-2R_x-S_y)], \\ H = \frac{1}{\varDelta}[S(2P-2R_x-S_y)-2R(2Q-2T_y-S_x)], \\ \varDelta = S^2-4RT, \end{cases}$$

und man setzt:

$$(29.)\quad \gamma = \text{const. } e^{\int(Gdx+Hdy)},$$

so ist identisch:

$$(30.)\quad \Phi(\gamma z) = \gamma F(z).$$

Der Fall $\varDelta = 0$ erheischt eine besondere Behandlung, auf welche hier nicht eingegangen wird.

Bemerkenswerthe specielle Fälle vorstehenden Satzes sind, erstens wenn $R = T = 0$, $S = 1$. Dann geht die Bedingung $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x}$ über in

$$(31.)\quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Zweitens wenn $P = Q = 0$ und noch $S = 0$, reducirt sich die Bedingung auf:

$$(32.)\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{R_x}{R} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{T_y}{T},$$

aus der folgt, dass $\frac{T}{R}$ ein Product der Form $\varphi(x).\psi(y)$, wo φ und ψ beliebig.

Weiter ist zu bemerken, dass aus der Identität $\Phi(\gamma z) = \gamma F(z)$ sich

als Corollar ergiebt: *Aus jedem particulären Integral einer der Gleichungen $F(z) = 0$, $\Phi(z) = 0$ folgt sogleich eines der andern.* Und endlich:

Falls die Bedingung $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x}$ *gilt, ist*

$$\gamma = \text{const.}\; e^{\int (G dx + H dy)}$$

eine particuläre Lösung der Multiplicatorgleichung

$$(\gamma R)_{xx} + (\gamma S)_{xy} + (\gamma T)_{yy} - (\gamma P)_x - (\gamma Q)_y = 0$$

der Gleichung $Rr + Ss + Tt + Pp + Qq = 0$, *in der also* $Z = 0$. Denn dies ist gerade die dritte der Gleichungen (25.). Man schliesst dies aus der Identität $\Phi(\gamma z) = \gamma F(z)$ auch unmittelbar. Denn da für $Z = 0$ man $F(\text{const.}) = 0$ hat, so folgt auch $\Phi(\gamma.\text{const.}) = 0$.

Nimmt man z. B. wie oben $R = T = 0$, $S = 1$ und $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ an, so folgt aus (28.), dass

$$\gamma = e^{2\int (Q dx + P dy)}$$

ein particuläres Integral der Multiplicatorgleichung

$$\gamma_{xy} - (\gamma P)_x - (\gamma Q)_y = 0$$

ist. Dies Integral multiplicirt mit einem Integral der ursprünglichen Gleichung ist wieder ein particuläres Integral der Multiplicatorgleichung.

Die Einführung einer Substitution $z = uz_1$ mit der Absicht, u so zu bestimmen, dass $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x}$ allgemein gelte, ist deshalb ergebnisslos, weil diese Grösse in Bezug auf die Substitution $z = uz_1$ als invariant sich erweist.

Der bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausnahmslos gültige Satz erhält also bei den partiellen Differentialgleichungen durch Auftreten einer Bedingung zwischen ihren Coefficienten eine wesentliche Einschränkung. Indessen zeigt es sich glücklicherweise, dass diese Einschränkung gerade besonders wichtige Differentialgleichungen nicht ausschliesst.

Capitel III.

Ueber die der partiellen Differentialgleichung adjungirten vollständigen Differentiale.

5.

Es sei wieder:

$$F(z) = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz,$$

$$\Phi(\zeta) = (R\zeta)_{xx} + (S\zeta)_{xy} + (T\zeta)_{yy} - (P\zeta)_x - (Q\zeta)_y + Z\zeta,$$

und wir wollen ein Gebiet $\mathfrak{G}$ in der xy-Ebene uns denken, über dessen

Areal das Integral $\int \zeta F(z) dx dy$ zu nehmen sei. Dann hat man:

$$(33.)\qquad \int \zeta F(z) dx dy = \int z \Phi(\zeta) dx dy + \int (U dx + V dy),$$

wo das zweite Integral rechts über den Rand von $\mathfrak{G}$ genommen ist. Die darin auftretenden Grössen U und V will ich schreiben:

$$(34.)\qquad \begin{cases} U = z\left(\frac{\partial}{\partial x}\zeta\frac{\Theta+S}{2} + \frac{\partial T\zeta}{\partial y} - \zeta Q\right) + p\zeta\frac{\Theta-S}{2} - q\zeta T, \\ V = z\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Theta-S}{2} - \frac{\partial R\zeta}{\partial x} + \zeta P\right) + p\zeta R + q\zeta\frac{\Theta+S}{2}. \end{cases}$$

Nicht ohne Weiteres liefert die partielle Integration diese Form des Randintegrals. Da nämlich der Term $\zeta S s$ von $\zeta F(z)$ zwei verschiedene Formen des Randintegrals ergiebt, je nachdem man ihn als $\zeta S \frac{\partial p}{\partial y}$ oder $\zeta S \frac{\partial q}{\partial x}$ auffasst, so erhält man $\int (U dx + V dy)$ symmetrisch, erst indem man die zwei so erhaltenen Formen von (33.) addirt und die Hälfte nimmt. Um aber sogleich zu den beiden unsymmetrischen Formen zurückgelangen zu können, addirt man noch $\frac{1}{2}\int d(z\zeta\Theta)$ hinzu, wo Θ beliebig. Die zwei unsymmetrischen Formen ergeben sich aus (34.), je nachdem man S oder $-S$ für Θ setzt. Dies betrifft die Symmetrie des Differentials $U dx + V dy$ in Bezug auf dx und dy. Um aber auch seine Symmetrie nach z und ζ zu zeigen, lassen wir Θ fort und fassen es wie folgt zusammen:

$$(34_1.)\qquad \begin{cases} U dx + V dy = z\zeta\Bigg[\left(\frac{Q_\zeta - Q_z}{2} + \frac{S}{2}\frac{\partial l\frac{\zeta}{z}}{\partial x} + T\frac{\partial l\frac{\zeta}{z}}{\partial y}\right)dx \\ \qquad - \left(\frac{P_\zeta - P_z}{2} + \frac{S}{2}\frac{\partial l\frac{\zeta}{z}}{\partial y} + R\frac{\partial l\frac{\zeta}{z}}{\partial x}\right)dy\Bigg], \end{cases}$$

wo mit P_ζ und Q_ζ die Coefficienten von ζ_x und ζ_y in (17.) gemeint sind, während P_z uud Q_z für P und Q geschrieben ist. Durch Vertauschung von ζ und z erhält man, bis auf das gleichgültige Gesammtvorzeichen, denselben Ausdruck wieder.

Wenn man unter den Voraussetzungen des Satzes V des vorigen Capitels γz für ζ einführt, so verschwindet das Differential identisch.

Es ergiebt sich aus (33.), dass, im Falle z und ζ den Differentialgleichungen $F(z) = 0$, $\Phi(\zeta) = 0$ genügen, die Grösse

$$U dx + V dy$$

ein *vollständiges* Differential sein muss.

Es hat die Form:

$$(34_2.)\quad Udx+Vdy = (\alpha z+\beta p+\gamma q)dx+(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p)dy.$$

Ein solches Differential kann für eine beliebige Function z von x und y vollständig sein, oder nur auf Grund einer partiellen Differentialgleichung, der z genügt. Im ersten Falle müssen die Coefficienten $\alpha, \dots \alpha_1, \dots$ gewisse aus $\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}=0$ leicht sich ergebende Formen haben, im zweiten wird man aus $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}$ und der partiellen Differentialgleichung eine der Grössen z, p, q, r, s, t zu eliminiren und darauf die Coefficienten der übrigen gleich Null zu setzen haben. In dem auf diese Weise erhaltenen Differential muss das obige $Udx+Vdy$ enthalten sein. Somit scheint der Weg über das Doppelintegral ein Umweg und die Darstellung eines zur Differentialgleichung $F(z)=0$ gehörigen vollständigen Differentials $Udx+Vdy$ auf dem zuletzt angedeuteten Wege allgemeiner und natürlicher.

6.

Wir können indess sogleich eine noch umfassendere Frage uns stellen, indem wir ein Differential der Form

$$(35.)\quad \begin{cases} Udx+Vdy = (\alpha z+\beta p+\gamma q+\mu r+\nu s+\varrho t)dx \\ \qquad +(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p+\mu_1 r+\nu_1 s+\varrho_1 t)dy \end{cases}$$

ansetzen, und die 12 Coefficienten $\alpha, \beta, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots$ auf Grund der Differentialgleichung $F(z)$ und der Bedingung $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}$ zu bestimmen suchen. Man würde sodann, um die Natur dieser Differentiale zu erkennen, noch höhere Differentialquotienten von z zu berücksichtigen haben, wenn es sich nicht, wie sogleich erhellen wird, zeigte, dass die Herbeiziehung der zweiten Differentialquotienten schon ausreicht, oder richtiger, schon überflüssig ist. Doch ist es keineswegs überflüssig dies durchzurechnen, wäre es auch nur, um die Forschung vor dem Einschlagen unfruchtbarer Richtungen zu schützen *). Aber es handelt sich um mehr als dies, nämlich um Feststellung der *nothwendigen* Form des der Differentialgleichung adjungirten Differentials. Dasselbe Differential erweist sich dann als in gleicher Weise auch der Multiplicatorgleichung adjungirt, so dass es zwischen beiden

*) Ich selbst habe mich lange auf falscher Fährte bemüht, bis es mir gelang, wie dies im Texte gezeigt wird, das Differential auf die erste Ordnung zu reduciren.

gewissermaassen ein Bindeglied bildet, und neben der Multiplicatorgleichung als dritte Grundform in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von grösster Bedeutung ist.

Wir legen also die Form (35.) des Differentials $Udx+Vdy$ zu Grunde. Bilden wir die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}=0$, so können wir aus ihr mit Hülfe von $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ drei Differentialquotienten von z eliminiren. Zweckmässiger ist es aber, so zu verfahren: Wir führen drei neue Functionen λ, λ_1, λ_2 ein und setzen:

$$(36.)\quad \frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda F+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung nimmt die Form an:

$$(37.)\quad \begin{cases} W^{(0)}z+W_0^{(1)}p+W_1^{(1)}q+W_0^{(2)}r+W_1^{(2)}s+W_2^{(2)}t+W_0^{(3)}z_0^3+W_1^{(3)}z_1^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +W_2^{(3)}z_2^3+W_3^{(3)}z_3^3 = 0, \end{cases}$$

wo z_0^3, etc. die dritten Differentialquotienten von z bedeuten. Es ist unerlässlich, die Coefficienten W vor Augen zu haben. Sie lauten:

$$(38.)\quad \begin{cases} W_0 = \alpha_y-\alpha_{1x}+\lambda Z+\lambda_1 Z_x+\lambda_2 Z_y, \\ W_0^{(1)} = \beta_y-\gamma_{1x}-\alpha_1+\lambda P+\lambda_1(P_x+Z)+\lambda_2 P_y, \\ W_1^{(1)} = \gamma_y-\beta_{1x}+\alpha+\lambda Q+\lambda_1 Q_x+\lambda_2(Q_y+Z), \\ W_0^{(2)} = -\gamma_1+\mu_y-\mu_{1x}+\lambda R+\lambda_1(R_x+P)+\lambda_2 R_y, \\ W_1^{(2)} = \beta-\beta_1+\nu_y-\nu_{1x}+\lambda S+\lambda_1(S_x+Q)+\lambda_2(S_y+P), \\ W_2^{(2)} = \gamma+\varrho_y-\varrho_{1x}+\lambda T+\lambda_1 T_x+\lambda_2(T_y+Q), \\ W_0^{(3)} = -\mu_1+\lambda_1 R, \\ W_1^{(3)} = \mu-\nu_1+\lambda_1 S+\lambda_2 R, \\ W_2^{(3)} = \nu-\varrho_1+\lambda_1 T+\lambda_2 S, \\ W_3^{(3)} = \varrho+\lambda_2 T. \end{cases}$$

Es müssen nun die hierin auftretenden 15 Grössen α, β, γ, μ, ν, ϱ, α_1, β_1, γ_1, μ_1, ν_1, ϱ_1, λ, λ_1, λ_2 so bestimmt werden, dass sämmtliche W verschwinden. Diese Aufgabe wird wesentlich durch folgenden Kunstgriff erleichtert. Wenn wir (37.) nach x und y integriren, und durch partielle Integration so umformen, dass unter dem Doppelintegral nur noch z vorkommt, so lautet der Coefficient von z:

$$(39.)\quad \begin{cases} W_0-\left(\frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 W_0^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial y^2}\right) \\ \quad -\left(\frac{\partial^3 W_0^{(3)}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 W_1^{(3)}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 W_2^{(3)}}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 W_3^{(3)}}{\partial y^3}\right). \end{cases}$$

Ich kann irgend eine Gleichung $W_m^{(n)} = 0$ ersetzen durch dies gleich Null gesetzte Aggregat. Wenn man aber die mit (37.) identische Gleichung (36.) nach x und y integrirt, dann wie so eben partielle Integration anwendet, so wird der Coefficient von z unter dem Doppelintegral:

$$(40.)\qquad \Phi(\lambda)+\Phi^{(x)}(\lambda_1)+\Phi^{(y)}(\lambda_2)$$

nach der Bezeichnungsweise im Beweis des Satzes II. über Multiplicatorgleichungen im vorigen Artikel. Auf Grund eben dieses Satzes ergiebt sich dann:

$$(41.)\qquad \Phi\left(\lambda-\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\right) = 0.$$

Ist nun ζ ein particuläres Integral der Gleichung $\Phi(\zeta) = 0$, und setzen wir

$$(42.)\qquad \lambda = \zeta+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y},$$

so können wir λ aus den Coefficienten (38.) entfernen. Es bleiben, da (42.) eine der 10 Gleichungen $W_m^{(n)} = 0$ vertritt, zu bestimmen die Grössen α, β, γ, μ, ν, ϱ, α_1, β_1, γ_1, μ_1, ν_1, ϱ_1, λ_1, λ_2 aus 9 Gleichungen. Mithin sind 5 von den vorstehenden Grössen willkürlich, als welche wir wählen λ_1, λ_2 und die drei Combinationen

$$(43.)\qquad \beta+\beta_1 = \Theta,\quad \mu+\nu_1 = \Theta_1,\quad \nu+\varrho_1 = \Theta_2.$$

Wir setzen

$$(44.)\qquad \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\Theta+\varphi, & \beta_1 = \frac{1}{2}\Theta-\varphi, \\ \mu = \frac{1}{2}\Theta_1+\psi, & \nu_1 = \frac{1}{2}\Theta_1-\psi, \\ \nu = \frac{1}{2}\Theta_2+\chi, & \varrho_1 = \frac{1}{2}\Theta_2-\chi \end{cases}$$

und können nunmehr das Problem völlig lösen. Zu bestimmen sind jetzt die Grössen α, γ, α_1, γ_1, ϱ, μ_1, φ, ψ, χ, und dies geschieht mit Hülfe der gleich Null gesetzten Coefficienten $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, von denen wir z. B. den ersten fortlassen dürfen. Aus den Gleichungen $W^{(3)} = 0$ folgen die Werthe von ϱ, μ_1, ψ, λ. Aus den Gleichungen $W^{(2)} = 0$ ergeben sich γ, γ_1, φ, und endlich α und α_1 aus den Gleichungen $W^{(1)} = 0$. Dann enthalten die Coefficienten des Differentials $Udx+Vdy$ noch die willkürlichen Grössen λ_1, λ_2, Θ, Θ_1, Θ_2, über die man beliebig verfügen kann, und sind sonst in den Grössen Z, P, Q etc. und ζ zusammengesetzt. Es ist klar, dass der von den willkürlichen Grössen abhängige Theil für sich ein Differential bilden muss, so dass wir ihn fortlassen können. Wir wollen indessen nur λ_1, λ_2, Θ_1, Θ_2 Null setzen, und Θ stehen lassen. Dann fallen die Coefficienten der zweiten Differentialquotienten im Differential (35.) fort, und dieses

reducirt sich auf:

$$(45.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big\{z\Big(\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial S\zeta}{\partial x}+\frac{\partial T\zeta}{\partial y}-Q\zeta\Big)+p\Big(\frac{\Theta}{2}-\tfrac{1}{2}S\zeta\Big)-qT\zeta\Big\}dx \\ &+\Big\{z\Big(\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial S\zeta}{\partial y}+\frac{\partial R\zeta}{\partial y}+P\zeta\Big)+q\Big(\frac{\Theta}{2}+\tfrac{1}{2}S\zeta\Big)+pR\zeta\Big\}dy,\end{aligned}\right.$$

ein Ausdruck, der sogleich in (34.) übergeht, wenn $\Theta\zeta$ statt Θ geschrieben wird.

Das vorstehende Differential enthält also, von Θ abgesehen, keine willkürliche Grösse mehr und ist auf feste Weise aus particulären Integralen der Differentialgleichungen $F(z)=0$, $\Phi(\zeta)=0$ zusammengesetzt. Wir konnten natürlich sehr viel kürzer zu diesem Differential gelangen, wenn wir von vornherein die zweiten Differentialquotienten fortliessen. Allein es war gerade meine Absicht zu zeigen, dass sie in dem von den Differentialgleichungen abhängigen festen Differential nicht auftreten.

Es scheint nicht überflüssig, unter einfacheren Voraussetzungen die obigen Formeln aufzustellen. Setzen wir

$$F(z)=s+up+vq+wz=0,$$
$$Udx+Vdy = (\alpha z+\beta p+\gamma q+\mu r)dx+(\alpha_1 x+\beta_1 q+\gamma_1 p+\varrho_1 t)dy,$$

so lauten die Coefficienten W in $\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda F+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F}{\partial y}=0$, wegen $\nu=0$, $\varrho=0$, $\mu_1=0$, $\nu_1=0$, $\lambda=\zeta+\lambda_{1x}+\lambda_{2y}$, $\beta+\beta_1=\Theta$, und auch $\mu=-\lambda_1$, $\varrho_1=\lambda_2$:

$$\begin{aligned} W_0 &= \alpha_y-\alpha_{1x}+\zeta w+(\lambda_1 w)_x+(\lambda_2 w)_y, \\ W_0^{(1)} &= \beta_y-\gamma_{1x}-\alpha_1+\zeta u+(\lambda_1 u)_x+(\lambda_2 u)_y+\lambda_1 w, \\ W_1^{(1)} &= \gamma_y-\beta_{1x}+\alpha+\zeta v+(\lambda_1 v)_x+(\lambda_2 v)_y+\lambda_2 w, \\ W_0^{(2)} &= -\gamma_1-\lambda_{1y}+\lambda_1 u, \\ W_1^{(2)} &= \beta-\beta_1+\zeta+\lambda_{1x}+\lambda_{2y}+\lambda_1 v+\lambda_2 u, \\ W_2^{(2)} &= \gamma-\lambda_{2x}+\lambda_2 v. \end{aligned}$$

Aus den gleich Null gesetzten W folgt:

$$\begin{aligned} -\alpha &= -\tfrac{1}{2}(\zeta+\lambda_{1x}-\lambda_{2y}-\lambda_1 v+\lambda_2 u)_x+\zeta v+\lambda_2 w-\frac{\Theta_x}{2}, \\ \alpha_1 &= -\tfrac{1}{2}(\zeta-\lambda_{1x}+\lambda_{2y}+\lambda_1 v-\lambda_2 u)_y+\zeta u+\lambda_1 w+\frac{\Theta_y}{2}, \\ \beta &= -\tfrac{1}{2}(\zeta+\lambda_{1x}+\lambda_{2y}+\lambda_1 v+\lambda_2 u)+\frac{\Theta}{2}, \\ \beta_1 &= \tfrac{1}{2}(\zeta+\lambda_{1x}+\lambda_{2y}+\lambda_1 v+\lambda_2 u)+\frac{\Theta}{2}, \\ \gamma &= \lambda_{2x}-\lambda_2 v, \\ \gamma_1 &= -\lambda_{1x}+\lambda_1 u. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Theil des Differentials $Udx+Vdy$ fortlassen, den wir bereits berücksichtigten, der ζ und Θ enthält, und nur den Theil hinschreiben, der von den willkürlichen Grössen λ_1 und λ_2 abhängt. Der λ_1 enthaltende Theil ist:

$$[z\cdot\tfrac{1}{2}(\lambda_{1x}-\lambda_1 v)-p\cdot\tfrac{1}{2}(\lambda_{1x}+\lambda_1 v)-r\lambda_1]dx$$
$$+[z(\tfrac{1}{2}(\lambda_{1x}-\lambda_1 v)_y+\lambda_1 w)+q\cdot\tfrac{1}{2}(\lambda_{1x}+\lambda_1 v)-p(\lambda_{1y}-\lambda_1 u)]dy.$$

Man überzeugt sich durch Rechnung, dass er, unabhängig von der Natur der Function λ_1, ein vollständiges Differential ist. Der λ_2 enthaltende Theil lautet:

$$[z.(\tfrac{1}{2}(-\lambda_{2y}+\lambda_2 u)-\lambda_2 w)-p\cdot\tfrac{1}{2}(\lambda_{2y}+\lambda_2 u)+q(\lambda_{2x}-\lambda_2 v)]dx$$
$$+[z\cdot-\tfrac{1}{2}(\lambda_{2y}-\lambda_2 u)+q\cdot\tfrac{1}{2}(\lambda_{2y}+\lambda_2 u)+\lambda_2 t]dy.$$

Auf diese Weise zerfällt also das ursprüngliche Differential $Udx+Vdy$ in vier vollständige Differentiale mit ζ, Θ, λ_1, λ_2, unter denen das mit ζ eben einen besonderen Charakter hat. Doch werden wir von den übrigen ebenfalls Gebrauch machen können, wie denn das Differential mit Θ bereits dazu diente, um das adjungirte Differential (mit ζ) symmetrisch zu machen.

Hätte es sich nur darum gehandelt, auf diesem neuen Wege zum Randdifferential (34.) zu gelangen, so wäre dies natürlich sehr viel kürzer zu erreichen gewesen, wenn man von vornherein die zweiten Differentialquotienten fortliess. Allein durch die obige Analyse wird eben offenbar, dass sie in dem von der Natur der Differentialgleichung abhängigen Differential nicht auftreten; sondern bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthält es mit Nothwendigkeit nur die erste Ordnung der Differentialquotienten von z und von ζ. Wenn andere Differentialquotienten darin vorkommen, so gehören sie eben Differentialien an, die zum Differential (34.) additiv hinzutreten und die, unabhängig von der Beschaffenheit der Functionen z und ζ, vollständige sind.

Wenn beide Argumente der partiellen Differentialgleichung imaginär angenommen werden, so ist man auf den obigen Weg angewiesen, um das adjungirte Differential zu erhalten.

7.

In Bezug auf dieses Differential gilt nun ein merkwürdiger Satz:

Wählt man zum Integrationsweg des Differentials eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichungen $F(z)=0$ *oder* $\Phi(\zeta)=0$, *d. i. eine Curve,*

die der Differentialgleichung:

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

genügt, so fallen aus dem Integral jenes Differentials auch die ersten Differentialquotienten von z fort.

Wir wollen für $Udx+Vdy$ nicht die Form (45.), sondern die Form (34.) wählen, d. i. setzen:

$$(34.)\quad \begin{cases} U = z\left(\frac{\partial}{\partial x}\zeta\frac{\Theta+S}{2}+\frac{\partial T\zeta}{\partial y}-\zeta Q\right)+p\zeta\frac{\Theta-S}{2}-q\zeta T, \\ V = z\left(\frac{\partial}{\partial y}\zeta\frac{\Theta-S}{2}-\frac{\partial R\zeta}{\partial x}+\zeta P\right)+p\zeta R+q\zeta\frac{\Theta+S}{2}. \end{cases}$$

Dann geben die Coefficienten von p und q in $Udx+Vdy$ gleich Null gesetzt:

$$(46.)\quad \frac{\Theta-S}{2}dx+Rdy=0, \quad -Tdx+\frac{\Theta+S}{2}dy=0,$$

woraus durch Elimination von Θ

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

hervorgeht, zum Zeichen dafür, dass die Curve, auf welcher die Grössen p und q unter dem Integral $\int(Udx+Vdy)$ fortfallen, eine Charakteristik ist. Weiter folgt, wenn z. B. in der ersten Gleichung

$$dy = \frac{dx}{2R}(S\pm\sqrt{\varDelta}), \quad \varDelta = S^2-4RT$$

gesetzt wird,

$$(47.)\quad \frac{\Theta}{2} = \frac{\mp\sqrt{\varDelta}}{2}.$$

Mit diesem Werth von $\frac{\Theta}{2}$ gehen wir in das Integral $\int(Udx+Vdy)$ hinein, indem wir uns der Bezeichnungen (18.)

$$M_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta S}{\partial x}+\frac{\partial\zeta T}{\partial y}-\zeta Q,$$

$$-M_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta S}{\partial y}+\frac{\partial\zeta R}{\partial x}-\zeta P$$

bedienen. Auf diese Weise wird das „charakteristische Randintegral", wie wir es nennen wollen:

$$(48.)\quad \int(Udx+Vdy) = \int z\left\{M_1dx+M_2dy-d\left(\pm\frac{\zeta\sqrt{\varDelta}}{2}\right)\right\}.$$

Im Falle $Z=0$ ist M_1dx+M_2dy ein vollständiges Differential. Nehmen wir

beispielsweise $R = T = 0$ an, so wird die Gleichung der Charakteristiken:

$$(49.)\quad S\,dx\,dy = 0,$$

und $dx = 0$, $dy = 0$ sind die Differentialgleichungen der beiden Schaaren von Charakteristiken. Um über das Vorzeichen im dritten Term unter dem Integral zu entscheiden, benutzen wir die Gleichungen:

$$(46.)\quad \frac{\Theta - S}{2}dx + R\,dy = 0, \quad -T\,dx + \frac{\Theta + S}{2}dy = 0,$$

in denen $\mp\sqrt{\Delta}$ statt Θ gesetzt zu denken ist. Wenn R und T Null sind und dx nicht, so ist $\mp\sqrt{\Delta} - S = 0$ also $\pm\sqrt{\Delta} = -S$. Also ist $-S$ statt $\pm\sqrt{\Delta}$ für die Schaar $dy = 0$ zu setzen, ebenso $+S$ statt $\pm\sqrt{\Delta}$ für die Schaar $dx = 0$.

Dadurch erhält für die Charakteristiken $dy = 0$ resp. $dx = 0$ unser Integral die Formen:

$$(50.)\quad \int z\left\{\frac{\partial \zeta S}{\partial x} - \zeta Q\right\}dx, \quad \int z\left\{-\frac{\partial \zeta S}{\partial y} + \zeta P\right\}dy,$$

die wir später direct herleiten wollen, wobei sich auch neue übersichtlichere Ausdrücke für das *charakteristische Randintegral* (48.) ergeben werden.

8.

Das im Vorstehenden besprochene Differential (35.)

$$U\,dx + V\,dy = (\alpha z + \beta p + \gamma q)dx + (\alpha_1 x + \beta_1 q + \gamma_1 p)dy,$$

in welchem die Coefficienten α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die oben angegebenen Bedeutungen haben, ist zwar die nächstliegende derartige Bildung, und wird wegen seines einfachen Zusammenhanges mit dem Flächenintegral die häufigste Verwendung finden. Es ist aber keineswegs überflüssig, andere Differentiale aufzustellen, welche nicht aus dem Flächenintegral hervorgehen, und welche unter Umständen noch nützlicher wie jenes sein können. Mit ihrer näheren Theorie werde ich in dieser ersten Mittheilung mich nicht beschäftigen. Ich erwähne deren zwei: Setzt man erstens:

$$(51.)\quad \begin{cases} U_1 dx + V_1 dy = \left[a\,z + b\,p + c\,q + l\,r + m\,s + n\,t + \cdots + \int(U\,dx + V\,dy)\right]dx \\ \qquad\qquad + \left[a_1 z + b_1 q + c_1 p + l_1 r + m_1 s + n_1 t + \cdots + \int(U\,dx + V\,dy)\right]dy, \end{cases}$$

so ergiebt die Bedingung

$$(52.)\quad \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}(az + bp + \cdots) + V - \frac{\partial}{\partial x}(a_1 z + b_1 q + \cdots) - U = 0$$

ein neues System von Gleichungen für die Coefficienten $a, b, \ldots a_1, b_1, \ldots$ in Verbindung mit den Coefficienten in $Udx + Vdy$. Bildet man über $\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x}$ das Doppelintegral mit den Diagonalecken $\alpha, \beta; X, Y$ (α, β stehen mit den oben so bezeichneten Coefficienten ausser Beziehung), welches lautet:

$$\int_\alpha^X U_1(x, Y)dx - \int_\beta^Y V_1(X, y)dy - \int_\alpha^X U_1(x, \beta)dx + \int_\beta^Y V_1(\alpha, y)dx,$$

so bleibt darin ein Doppelintegral mit den nämlichen Diagonalecken übrig. Gleiches gilt von jedem anderen Umfang, über dessen inneres Gebiet $\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x}$ integrirt wird. Das übrig bleibende Flächenintegral hat stets die Begrenzung des ursprünglichen.

Setzt man zweitens:

$$(53.)\quad \begin{cases} U_1 dx + V_1 dy = \left[a\,z + b\,p + c\,q + \cdots + \int (\alpha_2 z + \beta_2 p + \gamma_2 q + \cdots)\partial y\right] dx \\ \qquad + \left[a_1 z + b_1 q + c_1 p + \cdots + \int (\alpha_3 z + \beta_3 q + \gamma_3 p + \cdots)\partial x\right] dy, \end{cases}$$

so ergiebt sich ebenfalls ein neues System von Bedingungsgleichungen für die Coefficienten. Um dies in einem einfachen Falle aufzustellen, für $F(z) = s + up + vq + wz = 0$, und

$$U_1 dx + V_1 dy = \left[a\,z + b\,p + \int_{y_0}^{y} (\alpha_2 z + \beta_2 p + \gamma_2 q)\partial y\right] dx$$
$$+ \left[a_1 z + b_1 q + \int_{x_0}^{x} (\alpha_3 z + \beta_3 q + \gamma_3 p)\partial x\right] dy,$$

so ergiebt sich aus $\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial V_1}{\partial x}$, und wenn $\alpha_2 - \alpha_3 = \varDelta\alpha$, $\beta_2 - \beta_3 = \varDelta\beta$, $\gamma_2 - \gamma_3 = \varDelta\gamma$ gesetzt wird:

$$(54.)\quad \begin{cases} 0 = a_y - a_{1x} - w(b - b_1) + \varDelta\alpha, \\ 0 = b_y - a_1 - u(b - b_1) + \varDelta\beta, \\ 0 = a - b_{1x} - v(b - b_1) + \varDelta\gamma. \end{cases}$$

Die Grenzen x_0 und y_0 der Integrale sind ganz beliebig. Auch hier bleibt bei der Integration von $\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x}$ über ein Gebiet, ein Flächenintegral mit derselben Begrenzung wie das ursprüngliche übrig.

Im Anhang zu dieser Abhandlung ist gezeigt, wie das Differential (53.) benutzt werden kann, um nicht bloss das Randintegral, sondern auch das Flächenintegral, wie es die Multiplicatormethode liefert, zu erhalten.

Capitel IV.

Die Reduction der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Aufgabe der Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$F(z) = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0$$

besteht darin, durch reelle Substitutionen für die Variabeln x, y, z, bei denen die Differentialgleichung nicht aufhört linear zu sein, sie auf die möglich geringste Anzahl von Gliedern zurückzuführen.

9.

Wir beginnen diese Untersuchung bei der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten $R, S, \dots Z$. Die alsdann anzuwendenden Substitutionen sind:

$$(55.)\quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \alpha_1 x + \beta_1 y, \\ \zeta = z e^{ax+by}. \end{cases}$$

Wir beschränken uns zunächst auf die Einführung der Variabeln ξ, η statt x und y, und ersetzen erst nachher z durch ζ.

Man hat, unter p', q', ... die Differentialquotienten von z nach den ξ, η verstanden:

$$(56.)\quad \begin{cases} p = p'\alpha + q'\alpha_1, \\ q = p'\beta + q'\beta_1, \\ r = r'\alpha^2 + 2s'\alpha\alpha_1 + t'\alpha_1^2, \\ s = r'\alpha\beta + s'(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) + t'\alpha_1\beta_1, \\ t = r'\beta^2 + 2s'\beta\beta_1 + t'\beta_1^2. \end{cases}$$

Dies eingesetzt erhält man die Gleichung:

$$R'r' + S's' + T't' + P'p' + Q'q' + Zz = 0,$$

in der:

$$(56^*.)\quad \begin{cases} R' = \alpha^2 R + \alpha\beta S + \beta^2 T, \\ S' = 2\alpha\alpha_1 R + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)S + 2\beta\beta_1 T, \\ T' = \alpha_1^2 R + \alpha_1\beta_1 S + \beta_1^2 T, \\ P' = \alpha P + \beta Q, \\ Q' = \alpha_1 P + \beta_1 Q. \end{cases}$$

Dass R', S', T' nicht fortfallen können, ohne dass R, S, T Null sind, ist an sich klar; aber es folgt auch, dass P' und Q' nicht zugleich fortfallen können.

Was nun die Coefficienten R', S', T' anlangt, um die es sich bei dieser ersten Substitution vornehmlich handelt, und von denen man möglich viel zu beseitigen bestrebt ist, so dienen zur Uebersicht der einschlägigen Möglichkeiten folgende Relationen.

Zuerst die Umkehrungen

$$(57.)\quad \begin{cases} R'\beta_1^2-\beta\beta_1 S'+T'\beta^2 = \Delta^2 R, \\ R'\alpha_1^2-\alpha\alpha_1 S'+T'\alpha^2 = \Delta^2 T, \\ 2R'\alpha_1\beta_1-S'(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)+2T\alpha\beta = -\Delta^2 S, \\ \Delta = \alpha\beta_1-\alpha_1\beta. \end{cases}$$

Eine weitere Relation erhält man wie folgt. Setzen wir $R'=0$, so ergiebt sich:

$$\beta = \frac{\alpha}{2T}(-S+\varepsilon\sqrt{S^2-4RT}),\quad \varepsilon = \pm 1.$$

Setzt man diesen Werth von β ein in $S' = 2\alpha\alpha_1 R+(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)S+2\beta\beta_1 T$, so findet man:

$$(58.)\quad S' = \varepsilon\Delta\sqrt{S^2-4RT}.$$

Dieselbe Relation folgt natürlich auch aus $T'=0$, und auch aus $R'=T'=0$.

Drittens und letztens gelten folgende Relationen:

$$(59.)\quad \begin{cases} R'(\alpha_1 S+2\beta_1 T)^2+\alpha^2 T'(S^2-4RT) = 0, \\ T'(\alpha S+2\beta T)^2+\alpha_1^2 R'(S^2-4RT) = 0, \\ R'(\beta_1 S+2\alpha_1 R)^2+\beta^2 T'(S^2-4RT) = 0, \\ T'(\beta S+2\alpha R)^2+\beta_1^2 R'(S^2-4RT) = 0. \end{cases}$$

Diese vier Relationen erhält man durch Elimination von

$$\begin{array}{llll} \beta & \text{aus}\ S'=0 & \text{und} & R' = \alpha^2 R+\alpha\beta S+\beta^2 T, \\ \beta_1 & \text{,,} & \text{,,} & T' = \alpha_1^2 R+\alpha_1\beta_1 S+\beta_1^2 T, \\ \alpha & \text{,,} & \text{,,} & R' = \text{etc.} \\ \alpha_1 & \text{,,} & \text{,,} & T' = \text{etc.} \end{array}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln vollziehen wir zunächst die reelle Reduction der zweiten Differentialquotienten auf ihre geringste Anzahl, und unterscheiden dabei die Fälle $S^2-4RT \begin{smallmatrix} =0 \\ >0 \\ <0 \end{smallmatrix}$.

1. Für $S^2-4RT=0$ folgt aus (58.), dass, wenn einer der äusseren Coefficienten R', T' Null ist, der mittlere S' es auch sein muss, mithin bleibt nur einer der äusseren übrig. Da R' und T' Quadrate werden, so

findet irgend eines der Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ seine eindeutige Bestimmung, das andere bleibt zur Verfügung.

2. $S^2-4RT>0$. Hier können wir sowohl S' allein als auch R' und T' zusammen zum Verschwinden bringen, nicht aber S' und R' oder S' und T'. Durch $S'=0$ findet nur eines der Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ seine Bestimmung. Ausser S' kann deshalb nicht noch einer der Coefficienten R' und T' verschwinden, weil aus der Gruppe (59.) folgt, dass dann noch der andere verschwinden müsste. Bringen wir R' und T' zum Verschwinden, so wird dadurch $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ so bestimmt, dass

$$(60.)\qquad \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{S}{T} \quad\text{und}\quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{R}{T}$$

sind. Weiter haben für $S'=0$, wie ebenfalls aus Gruppe (59.) hervorgeht, R' und T' verschiedenes Vorzeichen.

3. $S^2-4RT<0$. Hier kann weder R' noch T' Null werden. Die Reduction beschränkt sich also auf $S'=0$, und dann haben R' und T', wie aus (59.) hervorgeht, gleiches Vorzeichen. Man hat also folgende reducirte Formen:

$$(61.)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{r} R'r'+P'p'+Q'q'+Z'z=0 \\ T't'+P'p'+Q'q'+Z'z=0 \end{array}\right\} & S^2-4RT=0, \\ \left.\begin{array}{r} S's'+P'p'+Q'q'+Z'z=0 \\ R'r'-T't'+P'p'+Q'q'+Z'z=0 \end{array}\right\} & S^2-4RT>0, \\ R'r'+T't'+P'p'+Q'q'+Z'z, & S^2-4RT<0, \end{array}\right.$$

wo in der vierten Gleichung der Uebersicht wegen das negative Zeichen eingeführt ist.

Ich werde die Differentialgleichungen der beiden ersten Formen ***parabolische***, die der beiden zweiten ***hyperbolische***, die der dritten Form ***elliptische*** nennen.

10.

Die Substitution $\zeta = ze^{ax+by}$ oder $z=\zeta e^{A\xi+B\eta}$ dient dazu, um die übrigen Coefficienten P', Q', Z zu reduciren. Die Differentialquotienten $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, etc. durch π, $\varkappa$, ϱ, σ, τ bezeichnet, werden die Formen von Differentialgleichungen, auf die es noch ankommt:

$$(62_1.)\quad \varrho R'+\pi(2AR'+T')+\varkappa Q'+\zeta(A^2R'+AP'+BQ'+Z) = 0, \quad \text{parabolisch.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (62_2.) & \begin{cases} \sigma S'+\pi(BS'+P')+\varkappa(AS'+Q') \\ \qquad +\zeta(ABS'+AP'+BQ'+Z) = 0, \end{cases} \\ (62_3.) & \begin{cases} \varrho R'-\tau T'+\pi(2AR'+P')+\varkappa(-2BT'+Q') \\ \qquad +\zeta(A^2R'-B^2T'+AP'+BQ'+Z) = 0, \end{cases} \end{array}\right\} \text{hyperbolisch.}$$

$$(62_4.)\quad \left.\begin{cases} \varrho R'+\tau T'+\pi(2AR'+P')+\varkappa(2BT'+Q') \\ \qquad +\zeta(A^2R'+B^2T'+AP'+BQ'+Z) = 0. \end{cases}\right\} \text{elliptisch.}$$

Bevor wir zur Discussion dieser Gleichungen übergehen, erinnere ich daran, dass die erste $(62_1.)$ entstand, indem wir $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ so bestimmten, dass $T' = 0$, wodurch auch $S' = 0$ wurde. In $(62_2.)$ sind $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ bestimmt als Wurzeln von $x^2T+xS+R = 0$. In $(62_3.)$ und $(62_4.)$ ist nur eins von beiden Verhältnissen bestimmt.

Was nun zunächst $(62_1.)$ anlangt, so können wir A und B so bestimmen, dass die Coefficienten von π und ζ verschwinden. Setzen wir aber den von $\varkappa$, d. i. $Q' = \alpha_1 P+\beta_1 Q$, gleich Null, so giebt dieser Werth des Verhältnisses $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, in $T' = \alpha_1^2 R+\alpha_1\beta_1 S+\beta_1^2 T$ eingesetzt:

$$(63.)\quad RQ^2-SPQ+TP^2 = 0$$

als Bedingung dafür, dass die partielle Differentialgleichung $F(z) = 0$ *in eine gewöhnliche übergeht.*

Sodann $(62_2.)$. Es können, durch Verfügung über A und B, π und $\varkappa$ entfernt werden oder ζ allein, nicht aber zugleich ζ und $\varkappa$ oder ζ und π. Setzen wir nämlich zugleich die Coefficienten z. B. von ζ und $\varkappa$ gleich Null, so folgt:

$$P'Q'-ZS' = 0$$

oder

$$(\alpha P+\beta Q)(\alpha_1 P+\beta_1 Q)+ZS' = 0,$$

und hieraus folgt wegen $S' = 2\alpha\alpha_1 R+(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)S+2\beta\beta_1 T$ und

$$(60.)\quad \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{S}{T},\quad \frac{\beta\beta_1}{\alpha\alpha_1} = \frac{R}{T}:$$

$$(64.)\quad RQ^2-PQS+TP^2+Z(S^2-4RT) = 0$$

als Bedingung dafür, dass die partielle Differentialgleichung $F(z) = 0$ *auf Quadraturen zurückführbar sei.*

Endlich $(62_3.)$ und $(62_4.)$. Mit Hülfe von A und B lassen sich π und $\varkappa$, π und ζ, aber nicht immer auf reelle Weise π und ζ oder $\varkappa$ und ζ

beseitigen. Denn setzen wir in beiden Gleichungen $P=0$, $Q=0$, mithin $P'=0$, $Q'=0$, woraus, wenn wir den Coefficienten von $\varkappa$ Null annehmen, auch $B=0$ folgt, und nehmen noch $S=0$ an, so wird der Coefficient von ζ

$$A^2(\alpha^2 R+\beta^2 T)+Z,$$

was, Null gesetzt, keinen reellen Werth von A zu ergeben braucht, obschon nur eines der Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ festgelegt ist, mithin z. B. α und β willkürlich bleiben. So kann man auch nicht zugleich, wie es auch sei, π, $\varkappa$, ζ beseitigen. Denn wenn aus den gleich Null gesetzten Coefficienten von π und $\varkappa$

$$A=-\frac{P'}{2R'},\quad P=-\frac{Q'}{2T'}$$

in den Coefficienten von ζ eingesetzt werden, so wird er:

$$\tfrac{1}{4}\Big(-\frac{P'^2}{R'}-\frac{Q'^2}{T'}+4Z\Big).$$

Schreibt man dies:

$$\frac{P'^2T'-P'Q'S+Q'^2R'}{S^2-4RT}+Z,$$

(wegen $S'=0$) und bedenkt, dass S^2-4RT und $RQ^2-PQS+TP^2+Z(S^2-4RT)$ (die linke Seite von (64.)) in Bezug auf die Vertauschung der ursprünglichen mit den accentuirten Buchstaben Invarianten sind, so folgt eben, dass die Substitutionscoefficienten nicht im Allgemeinen so bestimmt werden können, dass die Coefficienten von ζ, π und $\varkappa$ verschwinden.

Im Ganzen führt also die vorstehende Reduction auf folgende Formen von partiellen Differentialgleichungen mit 3 oder weniger Gliedern, bei welchen ich die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, auf die, vermöge der Bedingung (63.), partielle Differentialgleichungen manchmal zurückgeführt werden können, fortlasse:

$$(65.)\quad \begin{cases} R_1\varrho+Q_1\varkappa = 0 & \text{parabolisch.} \\ \left.\begin{array}{l} S_1\sigma+P_1\pi+Q_1\varkappa = 0, \\ S_1\sigma+Z_1\zeta = 0, \\ R_1\varrho-T_1\tau+P_1\pi \quad \text{oder} \quad Q_1\varkappa = 0, \\ R_1\varrho-T_1\tau+Z_1 z = 0 \end{array}\right\} & \text{hyperbolisch.} \\ \left.\begin{array}{l} R_1\varrho+T_1\tau+P_1\pi \quad \text{oder} \quad Q_1\varkappa = 0, \\ R_1\varrho+T_1\tau+Z_1\zeta = 0 \end{array}\right\} & \text{elliptisch.} \end{cases}$$

Es sind S_1, T_1, R_1 nur positiv gedacht. Die übrigen Coefficienten können beliebiges Vorzeichen haben. Dann kann also keine der Differentialgleichungen einer der vorstehenden Klassen durch die Substitutionen reell auf

eine der beiden anderen Klassen zurückgeführt werden. Aber auch innerhalb der drei Klassen lassen sich die verschiedenen Formen nicht immer reell auf einander reduciren.

Da man bisher zur Reduction nur die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ der Substitutionscoefficienten benutzte, so kann man noch α und α_1 verwenden. Doch einfacher ist es, in den Gleichungen (65.) nochmals eine Substitution $\xi = g.\xi_1$, $\eta = h.\eta_1$ einzuführen. Wir wollen zur leichteren Uebersicht die Buchstaben z, p, q, ... zurücksetzen und neue Coefficienten λ, μ einführen, und erhalten endlich das System:

$$(66.)\quad \begin{cases} r \pm \lambda^2 q = 0 & \text{parabolisch.} \\ \left.\begin{array}{l} s \pm \lambda^2 p \pm \mu^2 q = 0, \\ s \pm \lambda^2 z = 0, \\ r - t \pm \lambda^2 p \quad \text{oder} \quad \mu^2 q = 0, \\ r - t \pm \lambda^2 z = 0 \end{array}\right\} & \text{hyperbolisch.} \\ \left.\begin{array}{l} r + t \pm \lambda^2 p \quad \text{oder} \quad \mu^2 q = 0, \\ r + t \pm \lambda^2 z = 0 \end{array}\right\} & \text{elliptisch.} \end{cases}$$

Jede vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich auf eine dieser Gleichungen zurückführen. Darunter alle elliptischen Differentialgleichungen auf die Form $r+t\pm\lambda^2 z = 0$, alle hyperbolischen auf die Form s oder $r-t\pm\lambda^2 z = 0$. Es können in den vorstehenden Gleichungen auch λ und μ Null sein.

Die Aufgabe der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen ist es, die eigenthümlichen Lösungen jeder dieser Formen zu studiren und wohl zu sondern. Ohne Zweifel wird man unter gewissen Voraussetzungen diese verschiedenen Lösungsformen durch Einführung complexer Variabeln wieder vereinigen oder doch sehr verringern können. Andererseits aber ist es wahrscheinlich, ja durch die nähere Untersuchung der Lösungen von $s+up+vq+wz = 0$ und von $r+t = 0$ ausser Zweifel gestellt, dass man unter Umständen auf reelle Variabeln sich beschränken muss.

Capitel V.

Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen mit variabeln Coefficienten.

11.

Nun seien die Coefficienten R etc. in

$$F(z) = Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz = 0$$

Functionen von x und y. Wir führen die Substitutionen

$$(67.)\qquad \varphi(x,y)=\xi,\quad \varphi_1(x,y)=\eta$$

ein, und die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\xi_1,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\xi_2,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\eta_1,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\eta_2,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\xi_{11},\quad \text{etc.},\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\eta_{11},\quad \text{etc.}$$

Alsdann ist

$$(68.)\qquad \begin{cases} z = z, \\ p = p'\xi_1+q'\eta_1, \\ q = p'\xi_2+q'\eta_2, \\ r = r'\xi_1^2+2s'\xi_1\eta_1+t'\eta_1^2+p'\xi_{11}+q'\eta_{11}, \\ s = r'\xi_1\xi_2+s'(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)+t'\eta_1\eta_2+p'\xi_{12}+q'\eta_{12}, \\ t = r\xi_2^2+2s'\xi_2\eta_2+t'\eta_2^2+p\xi_{22}+q\eta_{22}. \end{cases}$$

Durch Multiplication mit den Coefficienten R etc. und Addition folgt:

$$(69.)\qquad R'r'+S's'+T't'+P'p'+Q'q'+Zz = 0,$$

wo:

$$(70.)\qquad \begin{cases} R' = R\xi_1^2+S\xi_1\xi_2+T\xi_2^2, \\ S' = 2R\xi_1\eta_1+S(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)+T\xi_2\eta_2, \\ T' = R\eta_1^2+S\eta_1\eta_2+T\eta_2^2, \\ P' = R\xi_{11}+S\xi_{12}+T\xi_{22}+P\xi_1+Q\xi_2, \\ Q' = R\eta_{11}+S\eta_{12}+T\eta_{22}+P\eta_1+Q\eta_2, \\ Z = Z. \end{cases}$$

Vergleicht man das System (70.) mit dem System (56.), so sieht man, dass die drei ersten Gleichungen der beiden Systeme übereinstimmen, wenn man ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 mit α, β, α_1, β_1 vertauscht. Es werden also auch alle in Bezug auf die ersten drei Coefficienten gültigen Formeln und Sätze, welche bei den constanten Coefficienten zu Tage traten, auf die variabeln übertragbar sein.

Aber die Bestimmung der Functionen ξ, η von x und y, vermöge deren die Reduction der Glieder zweiter Ordnung auf ihre geringste Anzahl stattzufinden hat, erheischt Integrationen. Diese können wir in elegante Form bringen.

Es mag vorangeschickt werden, dass es wieder auf das Zeichen der Grösse S^2-4RT ankommt. Indem wir bei der sonstigen ungeheuren Zu-

sammengesetztheit des Problems hier natürlich hinsichtlich der Beschaffenheit der Coefficienten R etc. die einfachste Voraussetzung machen, dass sie stetig, ja zunächst einmal nur ganz und rational seien, wird S^2-4RT durch die ganze Ebene Null, positiv, negativ sein können, aber auch theils positiv, theils negativ, beide Gebiete durch Nulllinien von S^2-4RT getrennt. Wir wollen die Trennungslinien vor der Hand auf sich beruhen lassen, und annehmen, dass wir nur Gebiete um uns haben, in welchen S^2-4RT sein Zeichen nicht wechselt oder Null ist.

Nun sei

$$d\xi = \xi_1 dx + \xi_2 dy = 0, \quad d_1\eta = \eta_1 d_1x + \eta_2 d_1y = 0,$$

woraus folgt:

$$R' = \frac{\xi_2^2}{dx^2}(R dy^2 - S dx dy + T dx^2),$$

$$T' = \frac{\eta_2^2}{d_1x^2}(R d_1y^2 - S d_1x d_1y + T d_1x^2).$$

Ist nun $S^2-4RT > 0$, so kann man $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d_1y}{d_1x}$ als die Wurzeln der Gleichung

$$(71.) \qquad R y'^2 - S y' + T = 0$$

ansehen. Somit sind

$$(72.) \qquad \varphi(x, y) = \xi, \quad \varphi_1(x, y) = \eta$$

die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0,$$

und durch diese Substitution wird die partielle Differentialgleichung reducirt auf

$$(73.) \qquad S's' + P'p' + Q'q' + Zz = 0.$$

Falls S^2-4RT nicht positiv ist, so bleiben die Formen

$$(74.) \qquad R'r' + P'p' + Q'q' + Zz = 0$$

und

$$(75.) \qquad R'r' + T't' + P'p' + Q'q' + Zz = 0$$

übrig.

Hinsichtlich der Reduction der übrigen Glieder (nicht zweiter Ordnung) sind hier die Verhältnisse verwickelter. Die Substitution

$$z = \zeta e^{\Psi(\xi, \eta)}$$

führt hier nämlich nur noch ein willkürliches Element, die Function Ψ, ein, während bei den partiellen Differentialgleichungen mit constanten Coef-

ficienten die Substitution $z = \zeta e^{A\xi + B\eta}$ die beiden willkürlichen Elemente A und B enthält. Es kann also nicht einmal angenommen werden, dass das System (65.) die Grundformen auch bei variablen Coefficienten erschöpfe, da hier eben zu einer so weit gehenden Reduction nicht genügend willkürliche Grössen zur Verfügung stehen. Indessen werden bei allgemeinen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen mit variablen Coefficienten jene Hauptformen (65.) doch wohl zum Ausgang dienen müssen.

Die Differentialgleichung der Charakteristiken

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

deren Integrale

$$\varphi(x, y) = \text{const.} = \xi, \quad \varphi_1(x, y) = \text{const.} = \eta$$

sich im Falle $S^2 - 4RT = 0$ auf *eines* reduciren, liefert also in diesem letzteren Falle — dem Fall der parabolischen Differentialgleichungen — nur *eine* Curvenschaar, im Falle $S^2 - 4RT > 0$ liefert sie zwei reelle Curvenschaaren, und, wenn $S^2 - 4RT < 0$, kommen zwei imaginäre Curvenschaaren heraus. Bei constanten Coefficienten bilden die Curven Systeme paralleler Geraden.

12.

Noch ein Punkt werde zum Schluss der Reduction berührt, nämlich die Frage nach der unbestimmten Integrirbarkeit der partiellen Differentialgleichung mit variablen Coefficienten, für welche wir bei constanten Coefficienten die Bedingung (64.) fanden. Es fragt sich also: Unter welchen Bedingungen ist $F(z)$ auf die Form

$$(76.) \qquad L\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + M\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + N\Gamma$$

zu bringen? Hierin ist

$$\Gamma = Ap + Bq + Cz.$$

Die Vergleichung der Coefficienten in $F(z) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + M\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + N\Gamma$ ergiebt:

$$(77.) \qquad \left\{ \begin{aligned} LA &= R, \\ LB + MA &= S, \\ MB &= T, \\ L(A_x + C) + MA_y + NA &= P, \\ LB_x + M(B_y + C) + NB &= Q, \\ LC_x + MC_y + NC &= Z. \end{aligned} \right.$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt:

$$A^2T+B^2R-ABS = 0.$$

Eliminirt man weiter mit Hülfe der ersten und dritten Gleichung L und M aus den drei letzten Gleichungen, weiter aus den so erhaltenen Gleichungen N, indem man diese Grösse aus deren dritter in die beiden vorhergehenden einsetzt, so zeigt sich sogleich, dass man durch Einführung von

$$\frac{A}{C} = A_1, \quad \frac{B}{C} = B_1$$

die Grösse C aus den übrig bleibenden zwei Gleichungen gänzlich beseitigen kann, und man behält im Ganzen die drei Gleichungen:

$$(78.)\quad \begin{cases} A_1^2T+B_1^2R-A_1B_1S = 0, \\ B_1R\frac{\partial A_1}{\partial x}+A_1T\frac{\partial A_1}{\partial y}-A_1B_1P+A_1^2B_1Z+B_1R = 0, \\ B_1R\frac{\partial B_1}{\partial x}+A_1T\frac{\partial B_1}{\partial y}-A_1B_1Q+A_1B_1^2Z+A_1T = 0, \end{cases}$$

aus denen folgt, dass die Ueberführung $F(z) = L\frac{\partial \Gamma}{\partial x}+M\frac{\partial \Gamma}{\partial y}+N\Gamma$ *einer* Bedingung unter den Coefficienten von $F(z)$ unterliegt. Es ist dies der Fall des *Monge-Ampère*schen Zwischenintegrals. Da übrigens die erste Gleichung (78.) zwei Werthe für das Verhältniss B' zu A' ergiebt, so erhält man zwei intermediäre Integrale, die zusammen das „allgemeine" repräsentiren. Der Fall $R = 0$, $T = 0$ ist besonders zu betrachten, da dann A *oder* B Null sein muss. Dann kann man aber ansetzen:

$$L\frac{\partial}{\partial y}(Ap+Bz)+M(Ap+Bz) = s+up+vq+wz,$$

oder

$$L\frac{\partial}{\partial x}(Aq+Bz)+M(Aq+Bz) = s+up+vq+wz.$$

Aus der Gleichsetzung der Coefficienten in der ersten Gleichung folgt $w = uv+v_y$, aus der zweiten $w = uv+u_x$, welches also die übrigens bekannten Bedingungen sind, unter denen allein $s+up+vq+wz$ integrabel wird.

13.

Durch die Substitutionen

$$\varphi(x, y) = \xi, \quad \varphi_1(x, y) = \eta,$$

welches im Falle positiver Discriminante die Integrale der Differential-

gleichung:

$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0$$

waren, wurde $F(z)$ auf:

$$S's' + P'p' + Q'q' + Zz = 0$$

reducirt, wo:

$$S' = \sqrt{S^2 - 4RT}(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$$

war (58.). Setzen wir

$$\frac{P'}{S'} = u, \quad \frac{Q'}{S'} = v, \quad \frac{Z}{S'} = w$$

und bezeichnen mit ζ das Product von $\sqrt{S^2 - 4RT}$ in eine unbestimmte Grösse, so ist

$$\int dx dy \zeta (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)(s' + up' + vq' + wz) = \int d\xi d\eta \zeta (s' + up' + vq' + wz).$$

Somit ist die Integration nach x, y verwandelt in eine solche nach ξ, η, und wir können nun nach unserem Belieben von der Bedeutung der Variabeln ξ, η absehen, statt ihrer x, y schreiben und uns darunter jetzt orthogonale Coordinaten denken. Wir können mit einem Wort an Stelle der allgemeinen Differentialgleichung $F(z) = 0$ im Falle des positiven $S^2 - 4RT$ diese setzen:

$$s + up + vq + wz = 0.$$

In den Anwendungen ist diese hyperbolische Form, obgleich mehrfach darin auftretend, doch bis jetzt wenigstens nicht die belangreichste. Es scheinen vielmehr die elliptischen Differentialgleichungen, schon ihrer Beziehungen zum complexen Functionsbegriff wegen, im Vordergrund zu stehen. Dennoch bieten die hyperbolischen Formen der Forschung den äusserst nützlichen Anhaltspunkt der reellen Charakteristiken dar, die es uns ermöglichen, wenigstens einer Art von Grenzbedingungen die Integration anzupassen, und bei einer anderen nicht weniger lehrreichen Art gestatten, das rein analytische Problem zu erkennen, auf welches fast alle Grenzbedingungen auch bei elliptischen Differentialgleichungen führen. Die parabolischen Differentialgleichungen sind dann zunächst als Grenzfall der hyperbolischen zu behandeln, zeigen aber bei genauerem Eingehen Eigenthümlichkeiten, welche unter den übrigen Differentialgleichungen ein Analogon nicht besitzen.

Capitel VI.

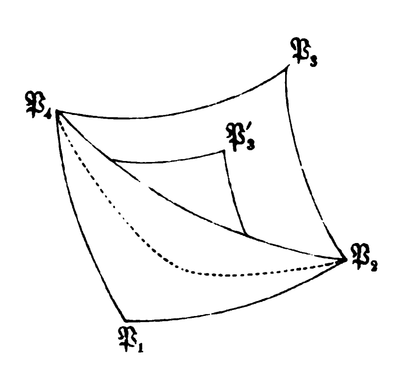
Die einläufigen Integrale der hyperbolischen Differentialgleichungen.

14.

Der Hauptsatz über die Integrale der Differentialgleichung

$$F(z) = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0$$

im Falle $S^2 - 4RT > 0$ lautet:



Wenn ein Curvenstück $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ gegeben ist, das von keiner Charakteristik mehr wie einmal geschnitten wird, und längs dieser Curve z und p oder q, also z, p und q gegeben sind, so ist z im ganzen von Charakteristiken begrenzten Curvenviereck $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ bestimmt.

Wir betrachten zunächst nur das Dreieck $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$, und es handelt sich nur darum, dass $\mathfrak{P}_3$ bestimmt sei, *denn dann ist nach demselben Satze jeder Punkt $\mathfrak{P}'_3$ bestimmt.* Dieser Satz wird im Falle der linearen Differentialgleichung $F(z) = 0$ auf einen andern zurückgeführt. Denn integriren wir das totale Differential

$$Udx + Vdy = (\alpha z + \beta p + \gamma q)dx + (\alpha_1 z + \beta_1 q + \gamma_1 p)dy$$

über den Weg $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_2$, so lassen die Integrale

$$\int_{\mathfrak{P}_2}^{\mathfrak{P}_3}, \int_{\mathfrak{P}_3}^{\mathfrak{P}_4}$$

eine bemerkenswerthe Transformation zu. Nach dem Satz Art. 7 fällt aus ihnen durch partielle Integration p und q heraus, da sie längs Charakteristiken genommen sind, und in den Coefficienten von z tritt noch das der Multiplicatorgleichung $\Phi(\zeta) = 0$ genügende ζ auf. Nimmt man nun an, dieses lasse sich zugleich so bestimmen, dass die Integrale selbst verschwinden, so dass nur die bei der partiellen Integration vor die Integrale getretenen Glieder übrig bleiben, so ist z für $\mathfrak{P}_3$ durch das Integral $\int_{\mathfrak{P}_2}^{\mathfrak{P}_4}$ und die Werthe von z für $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_4$ ausgedrückt. Eben vermöge jenes Satzes Art. 7 lässt nun diese Bestimmung eine wichtige Abänderung zu, welche der Zweck des Satzes ist. Man denke sich nämlich das Curvenstück $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ so deformirt, dass es allmählich in das Charakteristikenpaar $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ übergeht: alsdann fällt auch aus den Integralen

$$\int_{\mathfrak{P}_4}^{\mathfrak{P}_1}, \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2}$$

p und q heraus, ***und z in $\mathfrak{P}_3$ ist bestimmt durch z längs den Charakteristiken*** $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Dies ist also eine neue Bestimmungsart. Man kann die Curve $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_2$ z. B. streckenweise ersetzen durch Winkelstücke von Charakteristiken. Immer wird längs solchen p und q fortfallen, z allein zur Bestimmung dienen, theils unter den Integralen, theils durch Einzelwerthe an deren Grenzen. Um diese Bemerkungen zu vervollständigen, wäre noch auszuführen, was bei Stetigkeitsunterbrechungen von z stattfindet, worauf ich schon im § 112 meiner „Beiträge" hingewiesen habe.

Die Unstetigkeiten der an der Grenze gegebenen Function pflanzen sich in die Integraloberfläche fort längs den beiden die Unstetigkeitsstelle passirenden Charakteristiken.

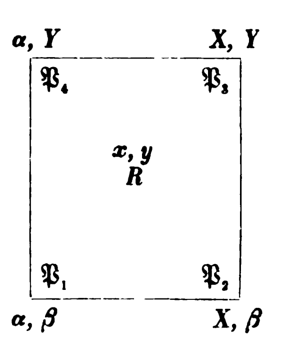
15.

Diese Aufstellungen sind es im Wesentlichen, welche im Folgenden genau durchgeführt und begründet werden sollen. Wenn nun auch in den Anwendungen, wie später zu zeigen, Charakteristiken auftreten, die keineswegs Systeme der x- und der y-Axe paralleler Geraden sind, so ist es doch vorläufig von grossem Nutzen, sich auf solche zu beschränken, d. h. als partielle Differentialgleichung eine solche der Form

$$F(z) = s + up + vq + wz = 0$$

anzunehmen, wozu wir nach dem Schluss des vorigen Capitels berechtigt sind. Die auf vorstehende Gleichung bezüglichen Ergebnisse sind dann leicht auf die allgemeine zu übertragen. Wir werden zunächst einen dem vorstehend angedeuteten entgegengesetzten Weg einschlagen, um zu den genauen Hauptsätzen der Theorie zu gelangen, wobei es nichts verschlägt, ob unser Verfahren zunächst ein unstrenges ist, ein Mangel, dem abzuhelfen eben unsere *fernere* Aufgabe sein wird.

Die Charakteristiken sind also jetzt die Schaaren $x = \text{constans}$, $y = \text{constans}$. Der erste und wichtigste Satz über die hyperbolischen Differentialgleichungen ist dann dieser:



Eine Function $z = f(x, y)$ ist eindeutig bestimmt in dem Rechteck R, wenn sie auf zwei aneinanderstossenden Seiten von ihm beliebig gegeben ist und der Gleichung $F(z) = 0$ überall im Innern genügt. Die willkürlich gegebenen

Functionswerthe müssen im Eckpunkt der zwei Seiten stetig sein. Die Bedingung, dass der Differentialgleichung $F(z)=0$ im Innern durchweg genüge geschehe, auferlegt der Function z am Rande, d. i. in jenem Seitenpaar gewisse Bedingungen. Sie muss dort mit ihrem ersten Differentialquotienten stetig sein. Unstetigkeiten von $z=f(\alpha, y)$ oder $=f(x, \beta)$ pflanzen sich in das Rechteck in der x- oder y-Richtung fort.

Des Folgenden wegen leiten wir zwei Formeln ab. Multipliciren wir z einmal mit λ, einmal mit μ und integriren nach x resp. y, so folgt:

$$(79.)\quad \begin{cases} \Big|_{\alpha}^{x} \lambda(q+uz)+\int_{\alpha}^{x} dx \left\{ z\left(w\lambda-\frac{\partial \lambda u}{\partial x}\right)+q\left(v\lambda-\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\right\} = 0, \\ \Big|_{\beta}^{y} \mu(p+vz)+\int_{\beta}^{y} dy \left\{ z\left(w\mu-\frac{\partial \mu v}{\partial y}\right)+p\left(u\mu-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right\} = 0, \end{cases}$$

oder durch geeignete Bestimmung von λ und μ

$$(80.)\quad \begin{cases} \Big|_{\alpha}^{x} e^{\int v\,dx}(q+uz)+\int_{\alpha}^{x} dx\, z e^{\int v\,dx}\left(w-uv-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \\ \Big|_{\beta}^{y} e^{\int u\,dy}(p+vz)+\int_{\beta}^{y} dy\, z e^{\int u\,dy}\left(w-uv-\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \end{cases}$$

16.

Einen wirklichen Beweis obigen Satzes an die Spitze zu stellen, möchte eben so schwer sein, wie dies bei ähnlichen Fundamentalsätzen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sich zeigt. Er ist vielmehr ein Endergebniss der Untersuchung. Man kann ihn aber plausibel machen durch das übliche Verfahren, indem man auf völlige Strenge verzichtet, nämlich unter der Voraussetzung der Convergenz gewisser Reihen.

Denkt man sich z nach Potenzen von $x-\alpha$, $y-\beta$ entwickelt:

$$(81.)\quad \begin{cases} z(x,y) = z(\alpha,\beta)+p(\alpha,\beta)(x-\alpha)+q(\alpha,\beta)(y-\beta) \\ +\frac{1}{2}\{r(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2+2s(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta)+t(\alpha,\beta)(y-\beta)^2\}+\text{ etc.}, \end{cases}$$

so ist in der That klar, dass z bestimmt ist durch die Differentialquotienten

$$p(\alpha,\beta),\quad r(\alpha,\beta),\quad \frac{\partial^3 z(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^3},\ \dots\quad q(\alpha,\beta),\quad t(\alpha,\beta),\quad \frac{\partial^3 z(\alpha,\beta)}{\partial \beta^3},\ \dots,$$

denn die gemischten Differentialquotienten

$$s(\alpha,\beta),\quad \frac{\partial^3 z(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2 \partial \beta},\ \dots$$

lassen sich mit Hülfe der Differentialgleichung durch jene ausdrücken.

Wenn also auf Seite $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ $z = f(\alpha, y) = \sigma(y)$, auf Seite $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ $z = f(x, \beta) = \varrho(x)$ gegeben ist, so hat man:

$$(82.)\quad \begin{cases} \varrho(x) = z(\alpha, \beta) + p(\alpha, \beta)(x-\alpha) + \dfrac{r(\alpha, \beta)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots, \\ \sigma(y) = z(\alpha, \beta) + q(\alpha, \beta)(y-\beta) + \dfrac{t(\alpha, \beta)}{2}(y-\beta)^2 + \cdots, \end{cases}$$

und es ist also offenbar, dass die Functionen ϱ, σ in der That $z(x, y)$ bestimmen. Man erhält jedoch, wenn man entweder $y-\beta = 0$, oder $x-\alpha = 0$ setzt, die Werthe $\varrho(x)$, $\sigma(y)$ aus $z(x, y)$ zurück. Dann folgt aber, dass auch $\varrho(\alpha) = \sigma(\beta)$ sein muss, d. i. z muss im Knie stetig gegeben sein.

Entwickeln wir z nach Potenzen von $y-\beta$ allein

$$z(x, y) = z(x, \beta) + q(x, \beta)(y-\beta) + \frac{t(x, \beta)}{2}(y-\beta)^2 + \cdots,$$

so können wir die Unbekannten $q(x, \beta)$, $t(x, \beta)$, ... mit Hülfe der ersten Gleichung (80.) bestimmen, indem wir sie fortgesetzt nach y differentiiren und β statt y schreiben. *Man bestimmt so die sämmtlichen Differentialquotienten von z nach y durch die Werthe von z auf der Strecke x, β oder $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ zwischen den Grenzen α und x.* Man sieht also, dass jeder Werth $z(x, y)$ durch *alle* Functionalwerthe z auf der Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ beeinflusst wird. Ebenso findet man durch Entwickelung von $z(x, y)$ nach Potenzen von $x-\alpha$ allein und Heranziehung der zweiten Gleichung (80.) für $x = \alpha$, dass $z(x, y)$ von sämmtlichen Functionalwerthen von z auf der Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ abhängt. Diese Abhängigkeit ist, wie wir sehen werden, das allgemeine Verhalten, woraus dann zurückfolgt, dass die auf den Schenkeln $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ gegebene Function z in der That in dem ganzen Rechteck R die Function $z(x, y)$ eindeutig bestimmt, sie darüber hinaus aber völlig unbestimmt lässt.

Dieses allgemeine Resultat schliesst aber nicht aus, dass es Differentialgleichungen giebt, deren Integrale nicht durch alle Functionswerthe längs den Grenzgeraden $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_4$ zugleich bestimmt sind, sondern schon durch einzelne, und es empfiehlt sich, dergleichen Beispiele sogleich anzuführen.

17.

Da ist vor allem die Differentialgleichung $s = 0$, deren Integral lautet:

$$z(x, y) = z(\alpha, y) + z(x, \beta) - z(\alpha, \beta).$$

Hier kann zunächst $z(\alpha, \beta)$ als $\lim_{x=\alpha}(\lim_{y=\beta} z(x, y))$ aufgefasst werden oder als $\lim_{y=\beta}(\lim_{x=\alpha} z(x, y))$. Soll aber $z(x, y)$ für $x = \alpha$ in $z(\alpha, y)$ und für $x = \beta$ in $z(x, \beta)$ übergehen, so müssen beide Grenzwerthe $z(\alpha, \beta)$

gleich sein. Hier wird $z(x, y)$ für jedes Werthepaar x, y bestimmt durch je einen willkürlichen Functionswerth auf der $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$- und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$-Strecke. Ausserdem sieht man deutlich, wie die Unstetigkeiten der Functionen $z(\alpha, y) = \sigma(y)$, $z(x, \beta) = \varrho(x)$ sich in das Innere von R fortpflanzen.

Weiter setzen wir in der ersten Gleichung (80.) $w - uv - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (was mit der Aehnliches ergebenden Annahme $w - uv - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ den integrablen Fall bildet Art. 12). Es folgt:

$$(q+uz)_{x,y} = e^{-\int_\alpha^x v(x,y)dx}(q+uz)_{\alpha,y}.$$

Dies mit $e^{\int_\beta^y u(x,y)dy}$ multiplicirt und nach y von $y=\beta$ bis $y=y$ integrirt, ergiebt sich

$$[ze^{\int_\beta^y u dy}]_{x,y} - z(x,\beta) = \Big|_\beta^y z(\alpha,y).e^{\int_\beta^y u(x,y)dy - \int_\alpha^x v(x,y)dy}$$

$$+\int_\beta^y dy\, z(\alpha,y)\Big[u(\alpha,y).e^{\int_\beta^y u(x,y)dy - \int_\alpha^x v(x,y)dx} - \frac{\partial}{\partial y}.e^{\int_\beta^y u(x,y)dy - \int_\alpha^x v(x,y)dx}\Big].$$

Es ist z im ersten Term links die gesuchte Lösung. Hier bemerken wir, dass sie bestimmt ist durch einen einzelnen willkürlichen Functionswerth $z(x, \beta)$ auf der Linie $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, und durch die sämmtlichen Functionswerthe z auf der Linie α, y ($\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$) von β bis y und noch durch einen einzelnen Functionswerth $z(\alpha, y)$ auf dieser Linie. Dieser letzte hat offenbar die Wirkung, Unstetigkeiten von $z(\alpha, y) = \sigma(y)$ in der x-Richtung in die Fläche hinein fortzupflanzen, was das Integral über die sämmtlichen Functionswerthe, welches rechts steht, allein nicht thun würde. Dies ist eine Art Uebergang von dem Fall $s = 0$, wo die Bestimmung von $z = f(x, y)$ ***nur*** besonderen Werthen von $f(\alpha, y)$ und $f(x, \beta)$ zufiel, zum allgemeinen, wo alle Functionswerthe von $f(\alpha, y)$ und $f(x, \beta)$ zur Bestimmung von $f(x, y)$ beitragen. Wir erkennen deutlich, dass in dem betrachteten Fall $w - uv - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nicht in einem noch so kleinen Intervall $z(\alpha, y)$ geändert werden kann, ohne dass $z(x, y)$ sich ändert, während eine Aenderung von $z(x, \beta)$ in einem Intervall, welches das x von $z(x, y)$ unberührt lässt, ohne Einfluss auf $z(x, y)$ bleibt. Weiter sehen wir aber, dass, wenn $z(x, y)$ die Grenzbedingungen erfüllen soll, für $x = \alpha$ den Werth $z(\alpha, y)$ und für $y = \beta$ den Werth

$z(x, \beta)$ anzunehmen, man haben muss:

$$\lim_{x=\alpha}(\lim_{y=\beta} z(x, y)) = \lim_{y=\beta}(\lim_{x=\alpha} z(x, y))$$

oder

$$z(\alpha+0, \beta) = z(\alpha, \beta+0).$$

Und wenn $z(x, y)$ im Innern von R durchweg die Differentialgleichung $F(z) = 0$ erfüllen soll, so müssen die Functionen $z(x, \beta)$, $z(\alpha, y)$ sammt ihren ersten Differentialquotienten stetig sein.

Fragt man im Allgemeinen, in welchen Fällen das charakteristische Integral durch einzelne Functionswerthe auf den Strecken $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ bestimmt sei, so wird man zunächst anzusetzen haben $z = \varrho(x)U + \sigma(y)V + W$, wo $\varrho(x)$ und $\sigma(y)$ willkürliche Functionen bedeuten. Mit diesem Werth von z muss man in die Differentialgleichung $F(z) = 0$ hineingehen, und U, V, W so bestimmen, dass die Coefficienten von $\varrho(x)$, $\varrho'(x)$, $\sigma(y)$, $\sigma'(y)$ Null werden, wodurch Bedingungen für die u, v, w folgen; doch werde ich auf diese Frage nicht weiter eingehen.

Schliesslich will ich noch ein Beispiel anführen eines durch alle Werthe der willkürlichen Functionen bestimmten charakteristischen Integrals.

Setzen wir $u = 0$, $v = 0$ und

$$F(z) = s + wz = 0,$$

und wir wollen w in geeigneter Weise bestimmen, um ohne die folgenden Betrachtungen sogleich eine Integration zu ermöglichen. Man hat zunächst:

$$q(x, y) - q(\alpha, y) = -\int_\alpha^x dx (zw)(x, y)$$

und durch Differentiation

$$t(x, y) - t(\alpha, y) = -\int_\alpha^x dx \Big(z \frac{\partial w}{\partial y} + wq\Big)(x, y).$$

Durch Multiplication von $F(z)$ mit λ und Integration nach x findet man andererseits

$$(\lambda q)(x, y) - (\lambda q)(\alpha, y) = \int_\alpha^x dx \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial x} q - \lambda w z\Big)(x, y).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so folgt:

$$(t+\lambda q)(x, y) - (t+\lambda q)(\alpha, y) = -\int_\alpha^x dx \Big[z\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda w\Big) + q\Big(w - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\Big)\Big](x, y).$$

Das Integral rechts verschwindet, wenn man setzt:

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda w = 0,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}-w = 0.$$

Durch Elimination von λ folgt:

$$\frac{\partial^2 lw}{\partial x \partial y}+w = 0,$$

und durch Elimination von w:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}-\lambda\lambda_x = 0$$

oder

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\lambda^2 = \varphi(y),$$

so dass w, aus den Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\lambda w = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\lambda^2 = \varphi(y)$$

bestimmt, eine integrable Differentialgleichung ergiebt.

Die Gleichung für λ lässt sich nun allgemein nicht auflösen. Doch findet man z. B. für $\varphi = \frac{c^2}{2}$:

$$\lambda = c\frac{1+\chi(x)e^{cy}}{1-\chi(x)e^{cy}}, \quad w = 2c\frac{\chi'(x)e^{cy}}{(1-\chi(x)e^{cy})^2},$$

und, beiläufig bemerkt, führt diese Gleichung $s+wz = 0$ durch geeignete Substitution auf diese Form:

$$s+\frac{2z}{(1-xy)^2} = 0.$$

Man hat also für z die auflösbare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(t+\lambda q)(x, y) = (t+\lambda q)(\alpha, y),$$

aus der zunächst folgt:

$$[qe^{\int \lambda dy}](x, y)-[qe^{\int \lambda dy}](x, \beta) = \int_\beta^y dy\, e^{\int \lambda_{xy} dy}(t+\lambda q)(\alpha, y).$$

Das Integral rechts kann so umgeformt werden, dass unter dem Integralzeichen nur noch z vorkommt, davor aber q und z, die sämmtlich in der Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ durch $z = \sigma(y)$ gegeben sind. Weiter ist aber auf der Strecke $x\beta(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$ q nicht gegeben und wird durch z ersetzt, indem man nach Einsetzen von β statt y die erste Formel (80.) anwendet. Dann ist aber ersichtlich,

dass y durch die ganze Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ der Functionswerthe $z = \varrho(x)$ bestimmt ist, so dass zur Bestimmung von $z(x, y)$ alle Functionswerthe auf dem Winkelstück $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ dienen.

18.

Diese Bemerkungen über das charakteristische Integral der hyperbolischen Differentialgleichungen vorausgeschickt, gelangen wir von ihm aus, wie nun zu zeigen, zu einer neuen Integralform.

Denken wir uns im Rechteck R eine polygonale Linie von der Ecke $\mathfrak{P}_4(\alpha, Y)$ zur Ecke $\mathfrak{P}_2(X, \beta)$ gezogen, welche aus geradlinigen Stücken besteht, die abwechselnd den Coordinaten parallel sind, so ist, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Function z, welche der Differentialgleichung $F(z) = 0$ genügt, im ganzen Rechteck R eindeutig bestimmt, wenn sie in der polygonalen Linie stetig gegeben ist. Denn je ein Winkelstück bestimmt ein Rechteck, und die den Winkelstücken abgekehrten Seiten des Rechteckes bestimmen neue Rechtecke, und diese successiv fortgesetzte Bestimmung füllt das ganze Rechteck R aus. Damit jedoch die Bestimmung eindeutig sei, muss jede der Coordinaten x, y eines Punktes, der die polygonale Linie durchläuft, monoton sich ändern. Denken wir uns nun die geraden Strecken, aus denen die polygonale Linie besteht, fort und fort verkleinert, und zwar so, dass sie einer Curve sich nähert, indem sie auf einem unendlich schmal werdenden Streifen zugleich mit der Curve verläuft, so treten neben z auf der Curve auch dessen Differentialquotienten nach x und y auf, weil in der Reihenentwickelung von z (81.) die Grössen $\varrho(x) = z(x, \beta)$ und $\sigma(y) = z(\alpha, y)$, mithin in der polygonalen Linie deren Differenzen vorkommen. So gelangt man zum Satz über das allgemeine einläufige Integral:

Wir denken uns im Rechteck R eine die Punkte $\mathfrak{P}_2(X, \beta)$ und $\mathfrak{P}_4(\alpha, Y)$ monoton verbindende Curve, darunter verstanden eine solche, längs der x und y monoton sich ändern. Längs dieser Curve seien z und eine der Grössen p und q als stetige Functionen der Bogenlänge der Curve gegeben, wodurch die andere der Grössen p und q ebenfalls als stetige Function von s gegeben ist. Ausserdem sei noch die Grösse $\frac{d^2z}{ds^2}$ endlich und stetig längs jener Curve. Dann giebt es eine Function z von x, y, die innerhalb des Rechtecks R stetig ist, der Differentialgleichung $F(z) = 0$ genügt, und bei Annäherung an die Curve mit ihren Differentialquotienten sich den dort gegebenen Grössen der-

selben Art beliebig nähert. Wenn an irgend einer Stelle der Curve z unstetig ist, so pflanzt diese Unstetigkeit sich durch das Innere von R längs der x- und der y-Richtung fort.

Mit dem in diesem Capitel eingeschlagenen Wege, auf dem ich einst diese Sätze fand, sind sie sehr mühsam mit befriedigender Strenge zu erreichen, wogegen die Multiplicatormethode oder vielmehr die Methode des adjungirten Differentials zu einem eigenthümlichen particulären Integral führt, welches sie mit leichter Mühe und grösserer Genauigkeit abzuleiten und zu erweitern erlaubt, ein Weg, den uns *Riemann* vorgezeichnet hat.

Capitel VII.

Das Hauptintegral der linearen partiellen Differentialgleichung.

19.

Das der partiellen Differentialgleichung $s+up+vq+wz = 0$ adjungirte Differential sei:

$$Udx+Vdy = (\alpha z+\beta p+\gamma q)dx+(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p)dy.$$

Bildet man

$$\text{(83.)} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}+\zeta F(z) = 0$$

und setzt die Coefficienten von z, p, q, r, s, t gleich Null:

$$\text{(84.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_y-\alpha_{1x}+\zeta w &= 0, \\ -\alpha_1+\beta_y-\gamma_{1x}+\zeta u &= 0, \\ \alpha-\beta_{1x}+\gamma_y+\zeta v &= 0, \\ -\gamma_1 &= 0, \\ \beta-\beta_1+\zeta &= 0, \\ \gamma &= 0, \end{aligned} \right.$$

so folgt:

$$\Phi(\zeta) = 0,$$
$$\alpha = \beta_{1x}-\zeta v, \quad \alpha_1 = \beta_y+\zeta u,$$
$$\beta-\beta_1 = -\zeta, \quad \gamma = \gamma_1 = 0.$$

Da eines der β willkürlich bleibt, führt man dies symmetrisch ein durch

$$\beta+\beta_1 = \Theta\zeta,$$

so dass:

$$\beta = \zeta\frac{\Theta-1}{2}, \quad \beta_1 = \zeta\frac{\Theta+1}{2}$$

und

$$(85.) \quad \begin{cases} U = z\left\{\frac{\partial}{\partial x}\zeta\frac{\Theta+1}{2} - \zeta v\right\} + p\zeta\frac{\Theta-1}{2}, \\ V = z\left\{\frac{\partial}{\partial x}\zeta\frac{\Theta-1}{2} + \zeta u\right\} + q\zeta\frac{\Theta+1}{2}, \end{cases}$$

wodurch Alles bestimmt ist. Es folgt also:

Bildet man mit den vorstehenden Ausdrücken das Differential:

$$Udx + Vdy,$$

so ist es vollständig, wenn z und ζ irgendwelche Lösungen der Differentialgleichungen

$$F(z) = 0, \quad \Phi(\zeta) = 0$$

vorstellen. Der die willkürliche Function Θ enthaltende Theil ist es für sich:

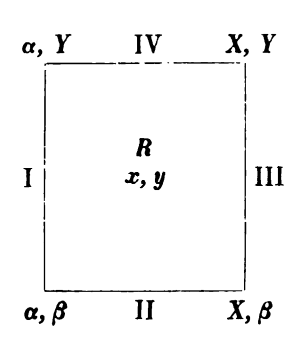
$$\frac{d\zeta z\Theta}{2}.$$

Indem wir $Udx+Vdy$ über die Begrenzung des Rechtecks R (siehe die folgende Seite) integriren in der üblichen Richtung, das Rechteck zur Linken, wollen wir die Formeln benutzen:

$$(86.) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} Udx = \Big|_{x_0}^{x_1} z\zeta\frac{\Theta-1}{2} + \int_{x_0}^{x_1} dx\, z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta\right) = \Big|_{x_0}^{x_1} z\zeta\frac{\Theta+1}{2} - \int_{x_0}^{x_1} dx\,\zeta(p+vz), \\ \int_{y_0}^{y_1} Vdx = \Big|_{y_0}^{y_1} z\zeta\frac{\Theta+1}{2} - \int_{y_0}^{y_1} dy\, z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta\right) = \Big|_{y_0}^{y_1} z\zeta\frac{\Theta-1}{2} + \int_{y_0}^{y_1} dy\,\zeta(q+uz). \end{cases}$$

Wir wollen in diesen Formeln $\Theta = 1$ setzen, und erhalten, indem wir über den Umfang von R integriren, und, wie dies unseren Zwecken entspricht, für I und II die zweiten Formen rechts, für III und IV die ersten Formen rechts wählen:

$$(87.) \quad \begin{cases} 0 = -\int_\beta^Y dy\,\zeta(q+uz)_{\rm I} + \Big|_\alpha^X (z\zeta)_{\rm II} - \int_\alpha^X dx\,\zeta(p+v\zeta)_{\rm II} \\ + \Big|_\beta^Y (z\zeta)_{\rm III} - \int_\beta^Y dy\, z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta\right)_{\rm III} - \int_\alpha^X dx\, z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta\right)_{\rm IV}. \end{cases}$$



Nun ist nach dem allerdings noch unbewiesenen Grundsatz über das charakteristische Integral z bestimmt als $F(x, y; \alpha, \beta)$ durch $F(z) = 0$ und seine Werthe auf den Strecken I und II. Ebenso ist $\zeta = \varphi(x, y; X, Y)$ bestimmt durch $\Phi(\zeta) = 0$ und seine Werthe, die auf den Strecken III und IV liegen, und ausserdem muss $z = f(x, y; \alpha, \beta)$ für $x = \alpha$, $y = \beta$ stetig sein, und $\zeta = \varphi(x, y; X, Y)$ für $x = X$, $y = Y$. Jene die Functionen z und ζ bestimmenden Werthe wollen wir so wählen, dass in der vorstehenden Gleichung die Integrale wegfallen. Wir setzen zu diesem Zweck:

$$(88.)\quad \begin{cases} \text{I} \quad q+uz = 0, \quad \text{d. i.} \quad z = f(\alpha, y; \alpha, \beta) = e^{-\int_\beta^y u(\alpha,y)dy}, \\ \text{II} \quad p+vz = 0, \quad \text{d. i.} \quad z = f(x, \beta; \alpha, \beta) = e^{-\int_\alpha^x v(x,\beta)dx}, \\ \text{III} \quad \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta = 0, \quad \text{d. i.} \quad \zeta = \varphi(X, y; X, Y) = e^{-\int_y^Y u(X,y)dy}, \\ \text{IV} \quad \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta = 0, \quad \text{d. i.} \quad \zeta = \varphi(x, Y; X, Y) = e^{-\int_x^X v(x,Y)dx}. \end{cases}$$

Und nun bleibt von (87.) übrig

$$(89.)\quad (z\zeta)(X, \beta) - (z\zeta)(\alpha, \beta) + (z\zeta)(X, Y) - (z\zeta)(X, \beta)$$

oder

$$(z\zeta)(\alpha, \beta) = (z\zeta)(X, Y),$$

und da links $z = f(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 1$, rechts $\zeta(X, Y; X, Y) = 1$, so hat man

$$(90.)\quad \zeta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta; X, Y) = z(X, Y) = f(X, Y; \alpha, \beta).$$

Denn die Bestimmungen (88.) lassen z im Punkt α, β, also $f(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ und ζ im Punkt X, Y, also $\varphi(X, Y; X, Y)$ stetig sein.

Mithin sind $f(X, Y; \alpha, \beta)$ und $\varphi(\alpha, \beta; X, Y)$ genau dieselben Functionen, und man erhält den Satz:

Es giebt eine Function

$$z = f(X, Y; \alpha, \beta),$$

welche erstens den Gleichungen genügt:

$$(91.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + u(X, Y)\dfrac{\partial z}{\partial X} + v(X, Y)\dfrac{\partial z}{\partial Y} + zw(X, Y) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} - \dfrac{\partial z u(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial z v(\alpha, \beta)}{\partial\beta} + zw(\alpha, \beta) = 0, \end{cases}$$

und die zweitens folgende Bedingungen erfüllt:

$$
(92.)\quad \begin{cases}
\text{I}\ f(\alpha, Y; \alpha, \beta) = e^{-\int_\beta^Y u(\alpha,y)\,dy}, \\
\text{II}\ f(X, \beta; \alpha, \beta) = e^{-\int_\alpha^X v(x,\beta)\,dx}, \\
\text{III}\ f(X, Y; X, \beta) = e^{-\int_\beta^Y u(X,y)\,dy}, \\
\text{IV}\ f(X, Y; \alpha, Y) = e^{-\int_\alpha^X v(x,Y)\,dx}.
\end{cases}
$$

Diese Function von vier Variabeln, welche zugleich mit einem Paar der Variabeln der Gleichung $F(z) = 0$, mit dem anderen Paar der Gleichung $\Phi(\zeta) = 0$ genügt (was allerdings auch ein Product zweier Functionen thun könnte), und die ausserdem die Bedingungen (92.) erfüllt, wollen wir das ***Hauptintegral*** der Gleichung $F(z) = 0$ nennen. Es spielt hinsichtlich seiner Anwendungen bei den einläufigen Integralen der hyperbolischen Differentialgleichungen eine ähnliche Rolle, wie die *Green*sche Function bei den rundläufigen Integralen der elliptischen Differentialgleichungen. Doch besteht zwischen beiden ein wesentlicher Unterschied, wie sogleich erhellen wird, nachdem wir noch über seine Entwickelung nach Potenzen einiges beigebracht haben werden.

20.

Wir können das Hauptintegral $\zeta = \varphi(\alpha, \beta; X, Y)$ nach Potenzen von $X-\alpha$, $Y-\beta$, oder $X-\alpha$ und $Y-\beta$ zugleich entwickeln. Wir wollen uns mit der Darstellung der Coefficienten

$$
(93.)\qquad a_p = \left[\frac{\partial^p \zeta}{\partial \alpha^p}\right]_{\alpha=X}
$$

in $\zeta = \Sigma a_p \frac{(\alpha - X)^p}{p!}$ beschäftigen.

Laut (88.) ist:

$$
(94.)\quad \begin{cases}
[\zeta]_{\alpha=X} = \varphi(X, \beta; X, Y) = e^{-\int_\beta^Y u(X,y)\,dy}, \\
[\zeta]_{\beta=Y} = \varphi(\alpha, Y; X, Y) = e^{-\int_\alpha^X v(x,Y)\,dx}.
\end{cases}
$$

Die Function $\zeta = \varphi(\alpha, \beta; X, Y)$ genügt der Gleichung

$$
(95.)\qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - u(\alpha,\beta)\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - v(\alpha,\beta)\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + \zeta\left(w(\alpha,\beta) - \frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial v}{\partial\beta}\right) = 0.
$$

Denkt man sich hierin $\alpha = X$ gesetzt und aus den vorstehenden Gleichungen $[\zeta]_{\alpha=X}$ und $\frac{\partial}{\partial\beta}[\zeta]_{\alpha=X}$ eingesetzt, so findet man durch Integration nach β zwischen den Grenzen β und Y, und wenn der Uebersicht halber $\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} = \varphi_\alpha(\alpha, \beta; X, Y)$ gesetzt wird:

$$\varphi(X, \beta; X, Y) = e^{-\int_\beta^Y u(X,y)\,dy}\Big\{\varphi_\alpha(X, Y; X, Y) - v(X, Y) + v(X, \beta) + \int_\beta^Y\Big(w - uv - \frac{\partial u}{\partial X}\Big)dy\Big\}.$$

Nun ist noch $\varphi_\alpha(X, Y; X, Y)$ zu bestimmen. Dies geschieht mit Hülfe der zweiten der vorstehenden Gleichungen. Man findet

$$\varphi_\alpha(\alpha, Y; X, Y) = v(\alpha, Y)e^{-\int_\alpha^X v(x, Y)\,dx},$$

also $\varphi_\alpha(X, Y; X, Y) = v(X, Y)$. Dies eingesetzt, erhält man schliesslich

$$(96.)\quad \begin{cases} \Big[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\Big]_{\alpha=X} = e^{-\int_\beta^Y u(X,y)\,dy}\Big\{v(X, \beta) + \int_\beta^Y (w - uv - u_x)_{X,y}\,dy\Big\}. \\ \text{Ganz ebenso findet man:} \\ \Big[\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\Big]_{\beta=Y} = e^{-\int_\alpha^X v(x,Y)\,dx}\Big\{u(\alpha, Y) + \int_\alpha^X (w - uv - v_y)_{x,Y}\,dx\Big\}. \end{cases}$$

Wenn man den zweiten Differentialquotienten $\Big[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\Big]_{\alpha=X}$ und die höheren $\Big[\frac{\partial^p\zeta}{\partial\alpha^p}\Big]_{\alpha=X}$ darstellen will, so werden die Formeln rasch sehr weitläufig. Doch ist die Darstellung eine völlig bestimmte. Man hat zunächst $\Phi(\zeta) = 0$ nach α zu differentiiren:

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^2\partial\beta} - u\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} - v\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\Big(w - 2\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial v}{\partial\beta}\Big) + \zeta\Big(\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}\Big) = 0.$$

Hierin $\alpha = X$ gesetzt, sind aus dem Früheren die Grössen von der dritten ab bekannt. Die Differentialgleichung wird:

$$(97.)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\Big]_{\alpha=X} - u\Big[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\Big]_{\alpha=X} - e^{-\int_\beta^Y u(X,y)\,dy}\Big[2v(w - uv - u_\alpha - v_\beta) \\ -uv_\alpha - w_\alpha - u_{\alpha\alpha} - v_{\alpha\beta} + (w - uv - u_\alpha - v_\beta)\int_\beta^Y (w - uv - u_\alpha)\,dy\Big]_{\alpha=X} = 0. \end{cases}$$

Die Differentiationen sind in der Klammer [ ] als Indices geschrieben. Hieraus kann man durch Integration von β bis Y $\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=X}$ finden, doch kommt in dem Ausdruck dafür noch vor $\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=X,\beta=Y}$. Diese Grösse folgt wie vorher durch zweimalige Differentiation nach α der zweiten Gleichung (90.). Aber wenn auch durch Bildung gewisser Aggregate die Darstellung von $\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3}\right]_{\alpha=X}$ noch angänglich wäre, es scheint, dass eine Fortsetzung dieser Darstellungen für höhere Differentialquotienten zu verwickelt sich gestalten würde, um sie ausführen zu können. Wir müssen es daher bei dem Ergebniss bewenden lassen, dass das Verfahren dazu ein völlig bestimmtes ist.

Gleiches gilt offenbar von allen Differentialquotienten der Form

$$\left[\frac{\partial^r\zeta}{\partial\alpha^p\partial\beta^q}\right]_{\alpha=X,\beta=Y},$$

hierin können die Differentiationen nach β nach denen nach α ausgeführt werden. Die Möglichkeit der *formalen* Reihenentwickelung des Hauptintegrals unterliegt demnach keinem Zweifel.

Was nun die *Convergenz* dieser Reihen anlangt, so sehe ich kein Mittel, sie bei reellen Variabeln zu untersuchen, da man die Reihen eben nicht darstellen kann. Ich glaube aber, dass dies unter gewissen Voraussetzungen über die u, v, w durch Einführung complexer Variabeln gelingen wird. Doch ist hier noch nicht der Ort, auf diese schwierige Materie einzugehen.

Ich werde noch die Coefficientendarstellung durchführen unter der einfacheren Voraussetzung, dass u und v Null sind.

Hier haben wir

$$\begin{aligned}\varphi(X,\beta;\ X,Y) &= 1,\\ \varphi(\alpha,Y;\ X,Y) &= 1,\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\partial\beta}+\zeta.w(\alpha,\beta) &= 0.\end{aligned}$$

Für $\alpha = X$ wird

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=X}+\zeta.w(X,\beta) = 0$$

und durch Integration nach β von β bis Y:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(\alpha,\ Y;\ X,Y)\right]_{\alpha=X}-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(\alpha,\ \beta;\ X,Y)\right]_{\alpha=X}+\int_\beta^Y[\zeta w]_{\alpha=X}dy,$$

oder wegen der zweiten vorstehenden Gleichung:

$$\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=X} = \int_\beta^Y [\zeta w]_{\alpha=X} dy.$$

Wir können nun leicht das Gesetz der folgenden Coefficienten aufstellen, weil $\left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\varphi(\alpha, Y; X, Y)\right]_{\alpha=X} = 0$ ist. Man bildet successiv:

$$(98.)\quad \begin{cases} [\zeta]_{\alpha=X} = 1, \\ \left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=X} = \int_\beta^Y [\zeta w]_{\alpha=X} dy, \\ \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=X} = \int_\beta^Y \left[\frac{\partial\zeta w}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=X} dy, \\ \left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3}\right]_{\alpha=X} = \int_\beta^Y \left[\frac{\partial^2\zeta w}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=X} dy, \\ \text{etc.} = \text{etc.} \end{cases}$$

und setzt in das Integral rechts in

$$\left[\frac{\partial^n\zeta}{\partial\alpha^n}\right]_{\alpha=X} = \int_\beta^Y \left[\frac{\partial^n\zeta w}{\partial\alpha^n}\right]_{\alpha=X} dy$$

die Werthe von

$$[\zeta]_{\alpha=X}, \quad \left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=X}, \quad \dots \quad \left[\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial\alpha^{n-1}}\right]_{\alpha=X}$$

aus den vorhergehenden Gleichungen ein.

Die Entwickelung nach Potenzen von $\beta-y$ ist symmetrisch. Die Entwickelung nach Potenzen von $\alpha-X$ und $\beta-Y$ zugleich benutzt den Umstand, dass alle Grössen der Form

$$\left[\frac{\partial^p\zeta}{\partial\alpha^p}\right]_{\alpha=X,\beta=Y}, \quad \left[\frac{\partial^p\zeta}{\partial\beta^p}\right]_{\alpha=X,\beta=Y}$$

verschwinden, während die gemischten Differentialquotienten aus der Differentialgleichung folgen.

Capitel VIII.

Anwendung des Hauptintegrals zur einläufigen Integration.

21.

Nach Art. 19 ist klar, dass das Hauptintegral schon allein seine Bestimmung findet, entweder durch Gleichung $F(z)_{X,Y} = 0$ mit den Grenzbedingungen I und II oder durch $\Phi(\zeta)_{\alpha,\beta} = 0$ mit den Grenzbedingungen III und IV. Auch sieht man sogleich, dass, wenn z. B. $F(z)_{X,Y} = 0$ und die

Grenzbedingungen I und II erfüllt sind, auch den Grenzbedingungen III, IV Genüge geschieht. Nur folgt nicht, ohne Weiteres, dass dann auch $\Phi(\zeta)_{\alpha,\beta} = 0$ stattfindet. Es ergiebt sich daraus noch, dass das Hauptintegral der gegebenen Differentialgleichung zugleich das Hauptintegral ihrer Multiplicatorgleichung ist, nur sind die Parameter des Hauptintegrals der Gleichung $F(z) = 0$ die Variablen des Hauptintegrals $\Phi(\zeta) = 0$ und umgekehrt. Ich werde sogleich mit einigen Worten andeuten, wie das Hauptintegral dazu dient, um das allgemeine einläufige Integral darzustellen, komme aber auf diesen Punkt später noch ausführlicher zurück, nachdem ich mit dem Hauptintegral selbst mich eingehender beschäftigt haben werde. Das charakteristische Integral erhalten wir wie Formel (87.), indem wir aber unter den Integralen die Differentialquotienten von z entfernen. Dies giebt:

$$0 = -\underbrace{\Big|_{\beta}^{Y} \zeta z + \int_{\beta}^{Y} dy\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\zeta\Big)}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\alpha}^{X} dx\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\zeta\Big)}_{\text{II}}$$

$$+ \underbrace{\Big|_{\beta}^{Y} \zeta z - \int_{\beta}^{Y} dy\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\zeta\Big)}_{\text{III}} - \underbrace{\int_{\alpha}^{X} dx\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\zeta\Big)}_{\text{IV}},$$

sodann setzen wir in III und IV $\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\zeta = 0$ und erhalten

$$(\zeta z)_{XY} = (\zeta z)_{X\beta} + (\zeta z)_{\alpha Y} - (\zeta z)_{\alpha\beta} - \underbrace{\int_{\alpha}^{X} dx\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\zeta\Big)}_{\text{II}} - \underbrace{\int_{\beta}^{Y} dy\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\zeta\Big)}_{\text{I}}.$$

Hierin ist ζ das Hauptintegral. Setzen wir

$$\zeta_{X,Y} = f(X, Y;\; X, Y) = 1,$$

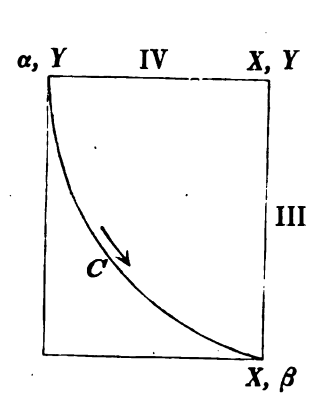
$$\zeta_{X,\beta} = f(X, Y;\; X, \beta) = e^{-\int_{\beta}^{Y} u(X,Y)\,dy},$$

$$\zeta_{\alpha,Y} = f(X, Y;\; \alpha, Y) = e^{-\int_{\alpha}^{X} v(x,y)\,dx},$$

so erhalten wir schliesslich das charakteristische Integral in der Form:

$$(99.)\quad \left\{ \begin{aligned} z_{XY} = z_{X\beta}\cdot e^{-\int_{\beta}^{Y} u(X,y)\,dy} + z_{\alpha Y}\cdot e^{-\int_{\alpha}^{X} v(x,Y)\,dx} - (z\zeta)_{\alpha\beta} \\ -\Big(\int_{\alpha}^{X} \underbrace{dx\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\zeta\Big)}_{\text{II}} + \int_{\beta}^{Y} dy\, z\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\zeta\Big)\Big). \end{aligned} \right.$$

Sein Existenzbeweis ist also auf den des Hauptintegrals zurückgeführt. Gleiches gilt von dem allgemeinen einläufigen Integral:



Der Integrationsweg von $Udx+Vdy$ führe über das Dreieck $\overline{C\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}}$. Wir lassen in den Ausdrücken für U und V (85.) die willkürliche Grösse Θ stehen, und erhalten:

$$0 = \underbrace{\Big|_{\beta}^{Y} z\zeta\frac{\Theta+1}{2} - \int_{\beta}^{Y} dy\, z\Big\{\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta\Big\}}_{\mathrm{III}}$$
$$-\underbrace{\Big|_{\alpha}^{X} z\zeta\frac{\Theta-1}{2} - \int_{\alpha}^{X} dx\, z\Big\{\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta\Big\}}_{\mathrm{IV}}$$
$$+\int_{\alpha,Y}^{X,\beta}(Udx+Vdy).$$

Setzt man hierin über III und IV $\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta = 0$, $\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta = 0$, so wird ζ Hauptintegral, und die Formel lautet

$$(100.)\quad \left\{\begin{aligned} [z]_{XY} &= z\frac{\Theta+1}{2}\cdot e^{-\int_{\beta}^{Y} u(X,y)\,dy} - z\frac{\Theta-1}{2}\cdot e^{-\int_{\alpha}^{X} v(x,Y)\,dx} \\ &-\int_{\alpha,Y}^{X,\beta}\Big(dx\Big\{z\Big(\frac{\partial}{\partial x}\zeta\frac{\Theta+1}{2} - \zeta v\Big) + p\zeta\frac{\Theta-1}{2}\Big\} \\ &\qquad + dy\Big\{z\Big(\frac{\partial}{\partial y}\zeta\frac{\Theta-1}{2} + \zeta u\Big) + q\zeta\frac{\Theta+1}{2}\Big\}\Big), \end{aligned}\right.$$

welches das allgemeine einläufige Integral ist. Man kann hierin erstens eine der Grössen p und q fortschaffen, zweitens an Stelle von z durch partielle Integration p und q einführen, was sogleich geschehen wird, endlich drittens statt z, p, q die Grössen z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ setzen. Es ist darauf hinzuweisen, dass es der allgemeine Satz ist, nach welchem die Lösung der Differentialgleichung $F(z) = 0$ bestimmt ist, wenn längs einer Curve die Function z und deren nicht im Sinne der Curve genommene Ableitung gegeben ist, aber, wie auch die allgemeine Formel zeigt, bildet hiervon eine Linie die Ausnahme, welche aus Stücken von Charakteristiken besteht. In einer solchen reicht zur Bestimmung aus die Function z allein. Ein von einem Punkt αY zu einem Punkt $X\beta$ oder von $\alpha\beta$ zu XY monoton verlaufendes Curvenstück bestimmt, wenn auf ihm z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ gegeben ist, die Lösung

von $F(z) = 0$ innerhalb der Grenzen I, II, III, IV und lässt sie ausserhalb völlig bestimmungslos. Ich habe die Grenzen I, II, III, IV, weil sie sich auf Grund der Natur der elliptischen Differentialgleichungen von selbst bilden, spontane Grenzen genannt und will den Ausdruck beibehalten.

22.

Für die Rolle des Hauptintegrals bei der Lösung partieller Differentialgleichungen ist der Fall bezeichnend, in welchem die Differentialgleichung ein Absolutglied hat:

$$s + up + vq + wz = W,$$

wo W irgend eine Function von x und y. Ich habe die einläufige Lösung dieser Differentialgleichung schon in meinen „Beiträgen etc.", pag. 252 ff. abgeleitet. Multiplicirt man die Gleichung mit ζ und integrirt über das Stück $\overline{C\,\mathrm{III}\,\mathrm{IV}}$ (Art. 21), so ergiebt sich nach dem Vorstehenden, wie an der citirten Stelle:

$$(101.)\begin{cases} z = z_{X,\beta}\, e^{-\int_y^Y u(X,y)\,dy} - \int_{\alpha,Y}^{X,\beta}\left[z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\zeta\right) + \zeta\left(\frac{\partial z}{\partial y} + uz\right)dy\right] - \int \zeta\, W\,dx\,dy, \\ \text{oder:} \\ z = z_{\alpha,Y}\, e^{-\int_x^X v(x,Y)\,dx} + \int_{\alpha,Y}^{X,\beta}\left[\zeta(p + vz)\,dx + z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\zeta\right)dy\right] - \int \zeta\, W\,dx\,dy. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Form der Lösung mit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Absolutglied, so fällt es auf, dass diese irgend zweier particulären Integrale bedarf, um vollständig zu sein, jene nur eines, aber eines ganz bestimmten particulären Integrals. Die Lösungen aller linearen partiellen Differentialgleichungen mit Absolutglied haben eine ähnliche Form. Z. B. treten deren in der Lehre vom Potential auf, bei denen überdies die Function W nur innerhalb eines gewissen Bezirks der Variabeln existirt, was selbstverständlich auch in den obigen Formeln gestattet sein muss.

23.

Das Randintegral $\int(U dx + V dy)$, in welchem z, p, q auftreten, kann man zunächst so umformen, dass darunter nur z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ vorkommen, wobei ich mich hier nicht aufhalte. Sodann kann man aber auch z direct oder

mit Hülfe von $dz = pdx + qdy$ entfernen, so dass nur noch p und q unter dem Integral auftreten, und dies ist zu discutiren. Hier zeigt es sich, dass, falls in der gegebenen Differentialgleichung $s + up + vq + wz = 0$ die Grösse $w = 0$ ist, man schon das Differential $Udx + Vdy$ von z befreien kann, was bereits von *Riemann* geschehen ist, während, wenn w nicht Null ist, dies nur beim Integral $\int(Udx + Vdy)$ gelingt.

Wir setzen

$$Udx + Vdy = (\alpha z + \beta p)dx + (\alpha_1 z + \beta_1 p)dy.$$

Unter Zugrundelegung der Differentialgleichung $s + up + vq + wz = 0$ genügen die Coefficienten α, β, α_1, β_1 den Relationen:

$$(102.) \quad \begin{cases} \alpha_y - \alpha_{1x} + \zeta w = 0, \\ \beta_y - \alpha_1 + \zeta u = 0, \\ -\beta_{1x} + \alpha_1 + \zeta v = 0, \end{cases}$$

wie leicht direct zu sehen und auch aus (38.) hervorgeht. Durch Elimination von α und α_1 findet man:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\beta_1 - \beta_0) - \frac{\partial \zeta u}{\partial x} - \frac{\partial \zeta v}{\partial y} + \zeta w = 0$$

oder

$$\beta_1 - \beta_0 = \int \zeta u \,\partial x + \int \zeta v \,\partial y + \int\int \zeta w \,\partial x \,\partial y,$$

indem hier Integrationen nach nur einer Variabeln wieder mit dem ∂ angedeutet werden.

Soll z aus dem Differential fortfallen, so muss sein:

$$\alpha dx + \alpha_1 dy = 0,$$

mithin $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$ und $w = 0$. Weiter ist:

$$\beta_{1x} - \zeta v = 0,$$
$$\beta_y + \zeta u = 0,$$

somit

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\beta_1 - \beta) - \frac{\partial \zeta u}{\partial x} - \frac{\partial \zeta v}{\partial y} = 0$$

oder

$$\beta_1 - \beta = \int \zeta u \,\partial x + \int \zeta v \,\partial y.$$

Es folgt also:

Falls

$$F(z) = s + up + vq = 0,$$

$$\beta = -\int \zeta u \,\partial y, \quad \beta_1 = \int \zeta v \,\partial x, \quad \zeta = \int \zeta u \,\partial y + \int \zeta v \,\partial x,$$

so ist

$$(103.)\qquad Udx+Vdy = \beta p dx+\beta_1 q dy$$

ein vollständiges Differential.

Etwas weniger einfach liegt eben die Sache im allgemeinen Falle, wenn w nicht $= 0$ ist. Dann kann, wie bemerkt, das Differential $Udx+Vdy$ selbst von z nicht befreit werden, doch will ich zeigen, wie dies beim Integral $\int(Udx+Vdy)$ zu bewerkstelligen ist.

Die Gleichungen (102.) werden erfüllt durch

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\int \zeta w\,\partial y,\quad \alpha_1 = -\tfrac{1}{2}\int \zeta w\,\partial x,$$

und setzt man $W=\iint \zeta w\,\partial x\,\partial y$, so folgt aus (102.)

$$\beta_y = -\zeta u-\tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial y},$$

$$\beta_{1x} = \zeta v+\tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Es wird

$$Udx+Vdy = (\alpha z+\beta p)dx+(\alpha_1 z+\beta_1 q)dy$$

$$= z\Big(\tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x}dx-\tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial y}dy\Big)+p\Big(-\int\zeta u\,\partial y-\tfrac{1}{2}W\Big)dx+q\Big(\int\zeta v\,\partial x+\tfrac{1}{2}W\Big).$$

Nun ist

$$z = \int_{s_0}^{s}(pdx+qdy)+z_0.$$

Setzt man diesen Werth in $\int_{s_0}^{s}(Udx+Vdy)$ ein, so ergiebt sich:

$$\int_{s_0}^{s}(Udx+Vdy) = z_0\int_{s_0}^{s}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}dx-\frac{\partial W}{\partial y}dy\Big)+\int_{s_0}^{s}\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}dx-\frac{\partial W}{\partial y}dy\Big)\int_{s_0}^{s}(pdx+qdy)$$

$$+\int_{s_0}^{s}p\Big(-\int\zeta u\,\partial y-\tfrac{1}{2}W\Big)dx+q\Big(\int\zeta v\,\partial x+\tfrac{1}{2}W\Big).$$

Integrirt man das zweite Integral partiell und setzt

$$\int_{s_0}^{s}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}dx-\frac{\partial W}{\partial y}dy\Big) = -W+2\int_{s_0}^{s}\frac{\partial W}{\partial x}dx,$$

$$= +W-2\int_{s_0}^{s}\frac{\partial W}{\partial y}dy,$$

so folgt:

$$(104.)\quad \begin{cases} \int_{s_0}^{S}(Udx+Vdy) = \tfrac{1}{2}z_S\int_{s_0}^{S}\left(\frac{\partial W}{\partial x}dx-\frac{\partial W}{\partial y}dy\right) \\ \qquad +\int_{s_0}^{S}\left[p\left(-\int\zeta u\,\partial y-\int_{s_0}^{s}\frac{\partial W}{\partial x}dx\right)dx+q\left(\int\zeta v\,\partial x+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial W}{\partial y}dy\right)dy\right]. \end{cases}$$

Man kann also ein beliebiges Stück des allgemeinen Randintegrals $\int(Udx+Vdy)$ nach dieser Formel transformiren, und in der Formel pag. 290 kann man also das ganze Integral rechts oder Stücke desselben so umschreiben, dass in ihnen p und q und ein Endwerth von z (für s_0 oder S) statt z und p oder z und q oder statt z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ gegeben sind. Es ist diese Transformation von Bedeutung ihrer Allgemeinheit wegen. Denn da die Gleichung $F(z)=s+up+vq+wz=0$ doch im Grunde nur eine abgekürzte Form der allgemeinen hyperbolischen Differentialgleichung $Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz=0$ mit positiver Discriminante ist, so ist bewiesen, dass deren Randintegral in derselben Weise dargestellt werden kann.

Ich gehe dazu über, zunächst einige einfache Beispiele von Hauptintegralen zu geben.

24.

Wir haben den Begriff des Hauptintegrals (Art. 19) festgelegt als Function von zwei Paaren von Variabeln, die in Bezug auf das eine Paar einer Bestimmung als charakteristisches Integral der Gleichung $F(z_{X,Y})=0$, in Bezug auf das andere Paar einer ähnlichen Bestimmung in Bezug auf die Gleichung $\Phi(\zeta_{\alpha,\beta})=0$ unterlag. Zweckmässiger ist es im Folgenden, beide Bestimmungen aus einander zu halten. Es handelt sich also darum, eine von folgenden beiden Aufgaben zu lösen.

Entweder ist eine Function

$$\zeta = \varphi(x, y; X, Y)$$

zu finden, welche der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u\zeta}{\partial x}-\frac{\partial v\zeta}{\partial y}+w\zeta = 0 \\ \text{und den Grenzbedingungen:} \\ \zeta = \varphi(X, y; X, Y) = e^{-\int_y^Y u(X,y)\,dy}, \\ \zeta = \varphi(x, Y; X, Y) = e^{-\int_x^X v(x,Y)\,dx} \end{cases}$$

genügt, oder eine Function $z = f(x, y; \alpha, \beta)$, welche die Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + u \dfrac{\partial z}{\partial x} + v \dfrac{\partial z}{\partial y} + wz = 0 \\ \text{und die Grenzbedingungen:} \\ z = f(\alpha, y; \alpha, \beta) = e^{-\int_\beta^y u(\alpha, y)\, dy}, \\ z = f(x, \beta; \alpha, \beta) = e^{-\int_\alpha^x v(x, \beta)\, dx} \end{cases}$$

erfüllt. Es ist $f(X, Y; \alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta; X, Y)$. Also führen beide Aufgaben zum selben Resultat.

Setzen wir zuerst:

$$F(z) = s = 0,$$

so ergiebt sich, dass die beiden Grenzbedingungen durch $z = 1$ erfüllt werden und die Differentialgleichung auch. Hier ist also

$$z = 1$$

das Hauptintegral.

Nehmen wir weiter an, dass in

$$F(z) = s + up + vq + wz = 0$$

die Coefficienten dem integrablen Fall $w - uv - u_x = 0$ entsprechen. Es sei

$$s + up + vq + wz = \frac{\partial}{\partial x}(q + uz) + v(q + uz) = 0.$$

Wir benutzen die zweite Herleitungsart des Hauptintegrals. Man hat:

$$q + uz = \varphi(y) e^{-\int_\alpha^X v\, dx},$$

$$z = e^{-\int_\beta^y u\, dy} \left\{ \psi(x) + \int_\beta^y d\eta\, \varphi(\eta)\, e^{\int_\beta^\eta u(x, y)\, dy - \int_\alpha^x v(x, \eta)\, dx} \right\},$$

$\psi(x)$ und $\varphi(y)$ sind willkürliche Functionen. Es sei also $z = f(x, y; \alpha, \beta)$. Setzt man $y = \beta$, so muss $e^{-\int_\alpha^x v(x, \beta)\, dx}$ herauskommen. Daher

$$\psi(x) = e^{-\int_\alpha^x v(x, \beta)\, dx}.$$

Für $x = \alpha$ muss man $e^{-\int_\beta^y u(\alpha, y)\, dy}$ erhalten. Dies wird der Fall sein, wenn

$\varphi(\eta) = 0$. Dann hat man also im Ganzen:

$$(105.)\qquad z = f(x, y;\, \alpha, \beta) = e^{-\int_\beta^y u(x,y)\,dy - \int_\alpha^x v(x,\beta)\,dx},$$

welches in diesem Falle das Hauptintegral ist.

Die hyperbolischen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, weiter Differentialgleichungen der Form

$$s + a.\lambda(y)p + b.\mu(x)q + c.\lambda(y).\mu(x).z = 0,$$

wo a, b, c beliebige Constanten, die auch Null sein dürfen, $\lambda(y)$, $\mu(x)$ beliebige Functionen sind, und noch eine sogleich anzuführende Form lassen sich auf die Form $s + z = 0$ reduciren, für die es leicht ist, das Hauptintegral aufzustellen.

Es sei

$$s + wz = 0,$$

und wir setzen zunächst w constant voraus. Das Hauptintegral muss für $x = \alpha$ und $y = \beta$ constant sein, und es muss der Stetigkeit wegen in beiden Fällen dieselbe Constante sein, die wir $= 1$ annehmen. Wir versuchen daher:

$$z = j(\varrho),$$

wo

$$j(0) = 1, \quad \varrho = w(x-\alpha)(y-\beta).$$

Es wird $s + wz \equiv w\{\varrho j''(\varrho) + j'(\varrho) + j(\varrho)\} = 0$. Setzen wir $\varrho = \frac{r^2}{4}$, $j(\varrho) = J(r)$, so wird diese gewöhnliche Differentialgleichung:

$$J''(r) + \frac{J'(r)}{r} + J(r) = 0.$$

Da $J(r)$ für $r = 0$ verschwindet, so ist dies die *Bessel*sche Function 0ter Ordnung:

$$J(r) = 1 - \frac{r^2}{(1.2)^2} + \frac{r^4}{(1.2.4)^2} - \frac{r^6}{(1.2.4.6)^2} + \cdots$$

und man erhält:

$$(106.)\qquad \begin{cases} j(\varrho) = J[2\sqrt{w(x-\alpha)(y-\beta)}] \\ = 1 - w\frac{(x-\alpha).(y-\beta)}{1.1} + w^2\frac{(x-\alpha)^2.(y-\beta)^2}{1.2.1.2} - w^3\frac{(x-\alpha)^3.(y-\beta)^3}{1.2.3.1.2.3} + \cdots \end{cases}$$

als Hauptintegral der Gleichung $s + wz = 0$. Bei der Wichtigkeit dieser Differentialgleichung als reducirte Form aller hyperbolischen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten wollen wir wenigstens noch ihr



charakteristisches Integral hinschreiben und verificiren. Um die für die Formel p. 289 verwendbare Form des Hauptintegrals zu erhalten, setzen wir in dessen vorstehenden Ausdruck x, y statt α, β und X, Y statt x, y. Dies giebt

$$\zeta = cj[w(X-x)(Y-y)] = cj(\varrho).$$

Somit wird der Ausdruck für das charakteristische Integral:

$$(107.)\quad \begin{cases} z_{XY} = z_{X\beta}+z_{\alpha Y}-z_{\alpha\beta}j[w(X-\alpha)(Y-\beta)] \\ \quad -\int_\alpha^X dx\, z\, \frac{\partial}{\partial x}j[w(X-x)(Y-\beta)]-\int_\beta^Y dy\, z\, \frac{\partial}{\partial y}j[w(X-\alpha)(Y-y)]. \end{cases}$$

Hierin also ist z im ersten Integral rechts eine beliebige Function $\psi(x)$, im zweiten eine beliebige Function $\chi(y)$ mit der Bedingung $\psi(\alpha) = \chi(\beta)$, und es ist $z_{X\beta} = \psi(X)$, $z_{\alpha Y} = \chi(Y)$, $z_{\alpha\beta} = \psi(\alpha) = \chi(\beta)$.

Die Verification anlangend, so sind die Grenzbedingungen ersichtlich erfüllt, da für $X=\alpha$ z. B. $z_{X,y}$ in $z_{\alpha,Y}$ übergeht, etc. Die Differentialgleichung $s+wz = 0$ ist ebenfalls erfüllt, wie man erkennt, wenn man z. B. das erste Integral rechts so schreibt:

$$-\Big|_\alpha^X z_{x\beta}j[w(X-x)(Y-\beta)]+\int_\alpha^X dx\frac{\partial z_{x,\beta}}{\partial x}j[w(X-x)(Y-\beta)].$$

Die Function j genügt nach X, Y für sich der Differentialgleichung, und alle sonstigen Terme, die in w multiplicirt darin auftreten, zerstören sich. Durch Einführung vorstehenden Ausdrucks in den obigen für z_{XY} wird dieser etwas abgekürzt, dafür aber die Deutlichkeit des Sinnes seiner Terme beeinträchtigt.

Auf die Differentialgleichung $s+z = 0$ lassen sich andere mit variabeln Coefficienten zurückführen. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$s+up+vq+wz = 0$$

unter der Annahme, dass u, v, w nur von x abhängen. Ich bemerke beiläufig, dass sie u. A. zwei particuläre Integrale von verschiedener Form zulässt. Erstens

$$z = e^{-\int\frac{w}{u}dx}\left\{y+\int\frac{w-uv}{u^2}dx\right\},$$

wo jedes der Integrale durch eine Constante ergänzt zu denken ist, und zweitens

$$z = e^{y\varrho-\int\frac{w+v\varrho}{u+\varrho}dx},$$

wo ϱ eine Constante. Aus diesem letzten kann durch Differentiation eine Schaar anderer particulärer Integrale gezogen werden.

Weiter sei zuerst $u = 0$. Man führt $z = \lambda z_1$ in die Differentialgleichung ein:

$$s_1 + up_1 + q_1\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + v\right) + z_1\left(u\frac{\lambda'}{\lambda} + w\right) = 0,$$

und setzt $\lambda = e^{-\int v\,dx}$, so ist im Falle $u = 0$:

$$s_1 + z_1(w - uv) = 0,$$

welche Differentialgleichung auf die vorher integrirte zurückführt.

Falls u constant ist, multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit $\frac{dx}{d\xi}$ und setzt:

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + v\right)\frac{dx}{d\xi} = b, \quad \left(u\frac{\lambda'}{\lambda} + w\right)\frac{dx}{d\xi} = c,$$

woraus man erhält:

$$\lambda = e^{\frac{\int (wc - vb)\,dx}{b - uc}}, \quad \xi = \frac{c}{b}\,\frac{\int (w - uv)\,dx}{b - uc}$$

und die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial y} + u\frac{\partial z_1}{\partial\xi} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1 = 0,$$

die für:

$$z_1 = z_2 e^{-b\xi - ay}$$

übergeht in

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial\xi\partial\eta} + z_2(c - ub) = 0.$$

Es ist aber

$$z_2 = ze^{uy + \int v\,dx}.$$

Nun ergiebt sich $z_2 = F(\Xi, Y; \alpha, \beta)$ aus jener Gleichung (107.), aber nicht als Hauptintegral, sondern als charakteristisches, wenn wir darin überall ξ statt x, Ξ statt X setzen. Man findet:

$$z_{2\Xi Y} = z_{2\Xi\beta} + z_{2\alpha,Y} - z_{2\alpha,\beta}\,j[w(\Xi - \alpha_1)(Y - \beta)]$$
$$-\int_{\alpha_1}^{\Xi} d\xi\, z_2 \frac{\partial}{\partial\xi} j[w(\Xi - \xi)(Y - \beta)] - \int_{\beta}^{Y} dy\, z_2 \frac{\partial}{\partial y} j[w(\Xi - \alpha_1)(Y - y)],$$

wo $w = c - ub$.

Wir führen ein neues X und α ein, deren Beziehungen zu Ξ und α_1 durch die Gleichungen

$$\Xi = \frac{c}{b}\,\frac{\int_0^X (w - uv)\,dx}{b - uc}, \quad \alpha_1 = \frac{c}{b}\,\frac{\int_0^a (w - uv)\,dx}{b - uc}$$

gegeben sind. Setzen wir nun in vorstehender Formel unter dem Integral

nach ξ als Integrationsvariable x ein, so wird aus der oberen Grenze Ξ die Grenze X, aus α_1 wird α. Und wenn ausserdem $ze^{uy+\int v dx}$ statt z_2 eingesetzt wird, so hat man das charakteristische Integral z der Differentialgleichung $s+up+vq+wz=0$ für ein constantes u, aus dem sogleich sich das Hauptintegral herstellen lässt, indem man für z die entsprechenden Werthe längs I und II einführt.

In diesem Artikel habe ich die wenigen Fälle zusammengestellt, in welchen, so weit ich es übersehe, das Hauptintegral ohne Weiteres sich darstellen lässt. Einige wenige besondere Gleichungen ausgenommen, wie die von *Riemann* behandelte Schallgleichung, scheint man von nun an neuer allgemeiner Methoden zu bedürfen, die ich im Folgenden auseinandersetzen werde.

Die im Obigen entwickelten Sätze und Methoden waren, einige Zusätze abgerechnet (namentlich im Cap. III und im Cap. V die Art. 20 und 23, sowie den Anhang), der Inhalt der in der Titelanmerkung erwähnten in Tübingen gehaltenen Vorlesung. Der in der Dissertation des Herrn *Albert Schwarz,* so wie sie mir vorgelegen, nachträglich unterdrückte Theil betraf die Theorie des Hauptintegrals, und zwar wesentlich in der Form, wie ich sie hier dargestellt habe.

Berlin, im December 1888.

Anhang.

Die Formel

$$(108.)\quad \begin{cases} 0 = -\int_\beta^Y dy(q\zeta+zu\zeta)_{\text{I}} + \int_\alpha^X dx(z\zeta_x - zv\zeta)_{\text{II}} \\ \qquad + \int_\beta^Y dy(q\zeta+zu\zeta)_{\text{III}} - \int_\alpha^X dx(z\zeta_x - zv\zeta)_{\text{IV}} + \int dx\,dy\,z\Phi(\zeta), \end{cases}$$

welche man durch die Multiplicatormethode findet, und in der ζ eine beliebige Function, eben der Multiplicator ist, haben wir im Obigen durch die Methode des adjungirten Differentials nicht erhalten, sondern nur die Formel, die aus der vorstehenden für $\Phi(\zeta)=0$ folgt, also das Randintegral. Daher ist noch zu zeigen, dass man vorstehende Formel *mit* dem Flächenintegral

auf dem Wege adjungirter Randdifferentiale erhalten kann, was für feinere Untersuchungen nicht überflüssig ist, da die Functionalbedingungen, welche man, vom Flächenintegral ausgehend, erhält, ausreichende sind, während die vom Randintegral ausgehend gefundenen, nothwendige sein müssen, auf welchen Punkt ich schon im Art. 2 meiner „Bemerkungen über $\Delta z = 0$“ (dieses Journal, Bd. 103, pag. 204) hingewiesen habe.

Man kann auf verschiedene Weise verfahren, um Formel (108.) vom Differential aus zu erhalten, z. B. indem man das zweite Differential (Art. 8) wieder aufnimmt in der Form:

$$(109.)\quad \begin{cases} Udx+Vdy = \left[\alpha z+\beta p+\gamma q+\int(a z+b p+c q+e r+g s+h t)\partial y\right]dx \\ \qquad +\left[\alpha_1 z+\beta_1 p+\gamma_1 q+\int(a_1 z+b_1 p+c_1 q+e_1 r+g_1 s+h_1 t)\partial x\right]dy. \end{cases}$$

Die Bedingungen für die Coefficienten, welche man erhält, wenn man in $\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ für s schreibt $-up-vq-wz$, lauten:

$$(110.)\quad \begin{cases} \alpha_y-\alpha_{1x}-w(\beta-\beta_1+g-g_1)+a-a_1 = 0, \\ \beta_y-\gamma_{1x}-\alpha_1-u(\beta-\beta_1+g-g_1)+b-b_1 = 0, \\ \gamma_y-\beta_{1x}+\alpha-v(\beta-\beta_1+g-g_1)+c-c_1 = 0, \\ -\gamma_1+e-e_1 = 0, \\ \gamma+h-h_1 = 0. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze halber:

$$\int(a z+b p+c q+e r+g s+h t)\partial y = \left[\int_{y_0}^{y}\right],$$

$$\int(a_1 z+b_1 p+c_1 q+e_1 r+g_1 s+h_1 t)\partial x = \left[\int_{x_0}^{x}\right],$$

so folgt, indem wir über den Umfang des Rechtecks Art. 15 integriren:

$$(111.)\quad \begin{cases} 0 = -\int_{\beta}^{Y}(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p)_{\mathrm{I}}\,dy+\int_{a}^{X}(\alpha z+\beta p+\gamma q)_{\mathrm{II}}\,dx \\ \quad +\int_{\beta}^{Y}(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p)_{\mathrm{III}}dy+\int_{a}^{X}(\alpha z+\beta p+\gamma q)_{\mathrm{IV}}dx \\ \quad -\int_{\beta}^{Y}dy\left[\int_{x_0}^{a}\right]_{\mathrm{I}}+\int_{\beta}^{Y}dy\left[\int_{x_0}^{X}\right]_{\mathrm{III}} \\ \quad +\int_{a}^{X}dx\left[\int_{y_0}^{\beta}\right]_{\mathrm{II}}-\int_{a}^{X}dx\left[\int_{y_0}^{Y}\right]_{\mathrm{IV}}. \end{cases}$$

Die vier Doppelintegrale ziehen sich in dies eine zusammen

$$-\int_\alpha^X\int_\beta^Y dx\,dy\,\{(a-a_1)z+(b-b_1)p+(c-c_1)q+(e-e_1)r+(g-g_1)s+(h-h_1)t\}.$$

Durch partielle Integration und unter Berücksichtigung der Relationen (110.) geht dies Doppelintegral über in

$$-\int_\alpha^X\int_\beta^Y dx\,dy\,z\,\Phi(\zeta),$$

wo $\zeta=\beta-\beta_1+g-g_1$.

Auch in den einfachen Integralen fällt alles bis auf ζ fort, wie man an einem von ihnen, z. B. an

$$-\int_\beta^Y(\alpha_1 z+\beta_1 q+\gamma_1 p)_1\,dy$$

leicht bestätigen kann, indem man vom Doppelintegral her hinzufügt:

$$\int_\beta^Y[(b-b_1)z-(e-e_1)_x z+(e-e_1)p+(g-g_1)q]\,dy.$$

Für $e-e_1$ setzt man γ_1 ein, dann fällt p heraus. Der Coefficient von z wird

$$-\alpha_1+b-b_1-\gamma_{1x},$$

darin $b-b_1=-\beta_y+\gamma_{1x}+\alpha_1+u\zeta$ gesetzt, wird er

$$-\beta_y+u\zeta.$$

Der Coefficient von q wird $-\beta_1+g-g_1=-\beta+\zeta$. Also wird das Integral über die Strecke I im Ganzen:

$$\int_\beta^Y[(-\beta_y+u\zeta)z+q(-\beta+\zeta)]_1\,dy.$$

Lässt man $-\beta_y z-q\beta$ als integrabel fort. so verwandelt sich das Integral in das erste in (108.) Man erhält also in der That dieselbe Formel vom adjungirten Differential aus, wenn man ihm die geeignete Form giebt, wie durch die Multiplicatormethode.

Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung.

Fortsetzung. Siehe dieses Journal Bd. 101, S. 300.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Nachdem in dem ersten Theile über die rationale Curve vierter Ordnung eine geometrische Grundlage für die weitere Behandlung derselben gewonnen worden ist, soll nun in dieser Fortsetzung die algebraische Seite in den Vordergrund treten. *Clebsch* hat schon darauf aufmerksam gemacht, dass drei binäre biquadratische Formen als die zweiten Polaren einer Grundform sechster Ordnung aufgefasst werden dürfen *). In Uebereinstimmung damit ergeben sich hier die Coordinaten der R_4 als die zweiten partiellen Differentialquotienten einer Form sechster Ordnung, von welcher Alles rational abhängig ist. Ich werde dieselben Bezeichnungen wie in dem ersten Theile benutzen, auf welchen ich hiermit verweise.

§ 12.

Eine Parameterdarstellung der Punkte von R_4 sei gegeben durch:

$$(1.)\qquad \varrho x_i = a_i + 4b_i\lambda + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4 \quad \text{für} \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

In § 3 (11^b.) haben wir wichtige Hülfsgrössen α_i, β_i, γ_i eingeführt, welche nach § 8 (23.) mit den Grössen a_i, ... e_i in folgenden Beziehungen stehen:

$$(23.)\qquad \begin{cases} [\alpha_\mu c_\nu] - 2[\beta_\mu b_\nu] + [\gamma_\mu a_\nu] = 0, \\ [\alpha_\mu d_\nu] - 2[\beta_\mu c_\nu] + [\gamma_\mu b_\nu] = 0, \\ [\alpha_\mu e_\nu] - 2[\beta_\mu d_\nu] + [\gamma_\mu c_\nu] = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$(29.)\qquad \begin{cases} -2[\alpha\beta b] + [\alpha\gamma a] = 0, & [\alpha\beta c] - [\beta\gamma a] = 0, & [\alpha\gamma c] - 2[\beta\gamma b] = 0, \\ -2[\alpha\beta c] + [\alpha\gamma b] = 0, & [\alpha\beta d] - [\beta\gamma b] = 0, & [\alpha\gamma d] - 2[\beta\gamma c] = 0, \\ -2[\alpha\beta d] + [\alpha\gamma c] = 0, & [\alpha\beta e] - [\beta\gamma c] = 0, & [\alpha\gamma e] - 2[\beta\gamma d] = 0. \end{cases}$$

---

*) S. *Clebsch* Vorlesungen über Geometrie. Herausgegeben von *Lindemann*, Leipzig 1876. S. 900 Anmerkung.

Wir dürfen deshalb setzen:

$$(30.)\quad \begin{cases} km_0 = 2[\alpha\beta a], \\ km_1 = 2[\alpha\beta b] = [\alpha\gamma a], \\ km_2 = 2[\alpha\beta c] = 2[\beta\gamma a] = [\alpha\gamma b], \\ km_3 = 2[\alpha\beta d] = 2[\beta\gamma b] = [\alpha\gamma c], \\ km_4 = 2[\alpha\beta e] = 2[\beta\gamma c] = [\alpha\gamma d], \\ km_5 = 2[\beta\gamma d] = [\alpha\gamma e], \\ km_6 = 2[\beta\gamma e]. \end{cases}$$

Führen wir nun an Stelle der x_i folgende neue Coordinaten ein:

$$2\tau[\alpha\beta x] = 2\xi_1; \quad \tau[\alpha\gamma x] = -2\xi_2; \quad 2\tau[\beta\gamma x] = 2\xi_3,$$

so erhalten wir die Parameterdarstellung der Punkte von R_4 durch:

$$(31.)\quad \begin{cases} \varrho\xi_1 = m_0+4m_1\lambda+6m_2\lambda^2+4m_3\lambda^3+m_4\lambda^4, \\ -\varrho\xi_2 = m_1+4m_2\lambda+6m_3\lambda^2+4m_4\lambda^3+m_5\lambda^4, \\ \varrho\xi_3 = m_2+4m_3\lambda+6m_4\lambda^2+4m_5\lambda^3+m_6\lambda^4, \end{cases}$$

welche so lange brauchbar ist, als $[\alpha\beta\gamma]$ von Null verschieden ist, oder R_4 keinen Undulationspunkt hat. Diesen Fall schliessen wir zunächst aus.

Setzen wir:

$$(32.)\quad \mathrm{M} = m_0\mu^6+6m_1\mu^5\lambda+15m_2\mu^4\lambda^2+20m_3\mu^3\lambda^3+15m_4\mu^2\lambda^4+6m_5\mu\lambda^5+m_6\lambda^6,$$

so folgt:

$$(33.)\quad \varrho\xi_1 = \frac{1}{6.5}\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\mu^2}; \quad -\varrho\xi_2 = \frac{1}{6.5}\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\mu\partial\lambda}; \quad \varrho\xi_3 = \frac{1}{6.5}\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\lambda^2}.$$

Die Coordinaten von R_4 lassen sich demnach als die zweiten partiellen Differentialquotienten einer binären Form sechster Ordnung* M *darstellen. Selbstverständlich hat M keinen speciellen Charakter. Es ist nun leicht einzusehen, dass alle Combinanten der Formen (1.) invariante Bildungen von M sind. Nach *Gordan**) sind nämlich alle Combinanten der Formen (1.) Covarianten folgender Fundamentalcombinante:

$$[a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2, \quad b+c(\lambda_1+\lambda_2)+d\lambda_1\lambda_2, \quad c+d(\lambda_1+\lambda_2)+e\lambda_1\lambda_2].$$

Setzt man aber hier für a_i, b_i, ... die Grössen m ein, so erhält man eine Covariante von M. M ist demnach die wichtigste Combinante der Formen (1).

Es wird sich nun darum handeln, erstens die wichtigsten Invarianten und Covarianten von M geometrisch als Eigenschaften von R_4 zu deuten

---

*) Vergl: *P. Gordan:* Ueber Combinanten. Math. Ann. Bd. V, S. 121.

und zweitens die geometrisch wichtigsten Punktgruppen einer allgemeinen R_4 durch Gleichungen zwischen den Covarianten von M darzustellen. Dies soll nun im Folgenden geschehen.

§ 13.

Geometrische Bedeutung von $\mathrm{M} = 0$.

Wir denken uns die Coordinaten von R_4 stets durch die Gleichungen (31.) oder (33.) dargestellt, schreiben aber zuweilen des bequemeren Ausdruckes wegen m_0 für a_1, a_2 oder $-b_1$ für m_1 etc.

Zunächst möge die geometrische Bedeutung von $\mathrm{M} = 0$ angegeben werden. Es ist in § 3 eine projective Abbildung des Kegelschnittes K auf R_4 gegeben worden. Ist:

$$\mu(\alpha u) = u_3; \quad 2\mu(\beta u) = u_2; \quad \mu(\gamma u) = u_1,$$

so haben wir für die Tangenten von K zu setzen:

$$u_3 = \lambda^2; \quad u_2 = -2\lambda; \quad u_1 = 1.$$

Die Gleichung $\mathrm{M} = 0$ dürfen wir aber schreiben:

$$\frac{1}{6.5}\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mu^2}\mu^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mu \partial \lambda}\mu\lambda + \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \lambda^2}\lambda^2\right\} = 0,$$

oder:

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0,$$

wenn ξ ein Punkt von R_4 ist, für welchen $\mathrm{M} = 0$ und u die ihm entsprechende Tangente von K ist. $\mathrm{M} = 0$ ***ist also die Gleichung der Parameter der sechs Punkte von R_4, welche auf den ihnen entsprechenden Tangenten von K liegen.*** Diese Tangenten von K sind aber zugleich Tangenten von Ψ_3, derjenigen Curve dritter Klasse, in Bezug auf welche die Punkte von R_4 die zweiten Polaren der Tangenten von K sind (§ 9). In der That, die Gleichung von Ψ_3 nimmt jetzt die einfache Form an:

$$m_0 u_1^3 + m_1(-3u_1^2 u_2) + m_2(3u_1^2 u_3 + 3u_1 u_2^2) + m_3(-6u_1 u_2 u_3 - u_2^3)$$
$$+ m_4(3u_1 u_3^2 + 3u_2^2 u_3) + m_5(-3u_2 u_3^2) + m_6 u_3^3 = 0.$$

Setzt man hier $u_3 = \lambda^2$; $u_2 = -2\lambda$; $u_1 = 1$, so folgt $\mathrm{M} = 0$.

Die zweite gemischte Polare für die Punkte λ_1 und λ_2 bezüglich M ist:

$$\frac{1}{6.5}\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mu^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mu \partial \lambda} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \lambda^2}\right\} = 0.$$

Setzt man hier:

$$u_3 = \lambda_1 \lambda_2; \quad u_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2); \quad u_1 = 1,$$

so sind λ_1 und λ_2 die Schnittpunkte von u mit K, und wir erhalten:

$$u_1\xi_1+u_2\xi_2+u_3\xi_3 = 0,$$

d. h. ***jeder gerade Schnitt von R_4 liefert vier Punkte, welche bezüglich*** M ***die zweite gemischte Polare derjenigen Punkte sind, in welchen dieselbe Gerade den Kegelschnitt K schneidet.***

Um die ***Hesse***sche Form von M zu deuten, bemerken wir zunächst, dass:

$$(34^a.) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0;$$

dagegen:

$$(34^b.) \quad \alpha_3 = 2\beta_2 = \gamma_1 = -\mathrm{E}; \quad \text{also} \quad 2[\alpha\beta\gamma] = \mathrm{E}^3,$$

wenn:

$$(35.) \quad \mathrm{E} = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung von K wird dann (siehe § 3, S. 307 des ersten Theiles)

$$(36.) \quad K = (\xi_3\xi_1-\xi_2^2)\mathrm{E} = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe aus (33.) ein, so ergiebt sich, dass ***die Hessesche Form*** H ***von*** M ***gleich Null gesetzt die acht Schnittpunkte von R_4 mit K auf R_4 repräsentirt.***

H hat noch eine zweite Bedeutung, wenn wir bemerken, dass auch:

$$(6.5.4)^2\frac{\mathrm{H}}{2} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\lambda^3} & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\lambda^2\partial\mu} \\ -\lambda & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\lambda^2\partial\mu} & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\lambda\partial\mu^2} \\ \lambda^2 & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\lambda\partial\mu^2} & \frac{\partial^3\mathrm{M}}{\partial\mu^3} \end{vmatrix},$$

d. h. $\mathrm{H} = 0$ ***stellt diejenigen acht Tangenten von R_4 dar, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte von K gehen.*** Es muss hier ein Irrthum berichtigt werden, welcher sich in § 5 des ersten Theiles vorfindet. Die dort angeschriebene Gleichung (14.) ist identisch mit $\mathrm{H} = 0$ und stellt nicht die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten dar. Die Anführung des nicht richtigen synthetischen Satzes beruht auf einer Verwechselung. (Siehe den folgenden Paragraphen.)

Die Schnittpunkte von R_4 mit K als Elemente der letzten Curve

sind die Nullwerthe von λ_1, μ_1 der Discriminante von

$$\mu_1 \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mu} + \lambda_1 \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda} = 0$$

oder diejenigen Elemente von K, deren erste Polaren bezüglich $\mathrm{M} = 0$ Doppelpunkte haben.

§ 14.

Wir wollen nunmehr nach *Clebsch* *) folgende Bezeichnungen für die wichtigsten Invarianten und Covarianten von M einführen. Es sei in symbolischer Schreibweise:

$$(37.)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = f = a_\lambda^6, \\ \mathrm{H} = (ab)^2 a_\lambda^4 b_\lambda^4; \quad j = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 a_\lambda^2 b_\lambda^2 c_\lambda^2; \quad i = (ab)^4 a_\lambda^2 b_\lambda^2, \\ l = (ai)^4 a_\lambda^2; \quad p = (ai)^2 a_\lambda^4 i_\lambda^2; \quad \Delta = (ii')^2 i_\lambda^2 i_\lambda'^2, \\ \mathrm{A} = (ab)^6; \quad \mathrm{B} = (ii')^4; \quad \mathrm{C} = (ii')^2(i'i'')^2(i''i)^2; \ \mathrm{A}_{ll} = (ll')^2, \end{cases}$$

dann gelten die Beziehungen:

$$(37^b.)\quad p = \frac{f}{3}\,\frac{\mathrm{A}}{2} - j; \quad \mathrm{A}_{ll} = 2\mathrm{C} + \tfrac{1}{3}\mathrm{AB}; \quad 144\,\mathrm{E} = \mathrm{A}^2 - 6\mathrm{B}.$$

Die Gleichung $j = 0$ stellt die Parameter der Wendepunkte von R_4 dar; denn es ist:

$$\left(\frac{2}{6!}\right)^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^4} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^3 \partial \lambda} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^2 \partial \lambda^2} \\ \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^3 \partial \lambda} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^2 \partial \lambda^2} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu \partial \lambda^3} \\ \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^2 \partial \lambda^2} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu \partial \lambda^3} & \frac{\partial^4 f}{\partial \mu^4} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6} j.$$

Um die Bedeutung von $i = 0$ zu erhalten, schreiben wir i in der Form:

$$\begin{aligned}(38.)\quad \frac{i}{2} = {} & (m_0 + 2m_1\lambda + m_2\lambda^2)(m_4 + 2m_5\lambda + m_6\lambda^2) \\ & -4(m_1 + 2m_2\lambda + m_3\lambda^2)(m_3 + 2m_4\lambda + m_5\lambda^2) + 3(m_2 + 2m_3\lambda + m_4\lambda^2)^2.\end{aligned}$$

Setzen wir hier in jedem Klammerausdruck: $1 = u_1$; $-2\lambda = u_2$; $\lambda^2 = u_3$, so erhalten wir für $i = 0$:

$$(17.)\quad (au)(eu) - 4(bu)(du) + 3(cu)^2 = 0.$$

Dies ist aber in Liniencoordinaten die Gleichung des von den sechs Wendetangenten der R_4 berührten Kegelschnittes S. ***$i = 0$ liefert also die Para-***

*) Siehe *Clebsch:* Theorie der binären algebraischen Formen. S. 283 u. f.

meterwerthe derjenigen Punkte von K, welche den vier gemeinsamen Tangenten von K und S zukommen; sie sind zugleich diejenigen Elemente, deren zweite Polaren bezüglich M Gruppen von äquianharmonischen Punkten bilden.

Für l finden wir analog:

$$(39.)\qquad -\frac{l}{4} = \{-2[acd]+[abe]\}-\lambda\{8[bcd]-[ace]\}+\lambda^2\{-2[bce]+[ade]\},$$

d. h. ***$l = 0$ stellt diejenigen beiden Punkte von R_4 dar, in welchen der Wendekegelschnitt, abgesehen von den Wendepunkten, R_4 noch schneidet.*** Vgl. § 10, (28.).

Um die Gleichung für die ***Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten von R_4*** zu erhalten, machen wir folgende Betrachtung, welche die anfangs des § 5 gegebene zu ersetzen hat. Es sei wieder R_4 das perspective Bild einer Raumcurve ϱ_4. Die Nullsysteme der ersten Osculanten der ϱ_4 gehören einem Bündel an, dessen Träger die Regelschaar ist, durch deren Strahlen je drei doppelt berührende Ebenen von ϱ_4 gehen. Diese Nullsysteme umhüllen einen Complex zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche eben diese Regelfläche ist. Der Kegelschnitt N (vgl. § 6) entsteht nun als Schnitt der Bildebene mit demjenigen Complexkegel, dessen Spitze das Projectionscentrum ist, und ist projectiv dadurch auf R_4 bezogen, dass die Wendegeraden der ersten Osculanten von R_4 die Curve N berühren. ***Eine Doppeltangente von R_4 schneidet somit*** N ***in denjenigen Punkten, welche den Berührungspunkten der Doppeltangente mit R_4 entsprechen.***

Die Tangentendarstellung von N ist nun (§ 6, (20''.))

$$(20''.)\qquad v_i = [a_\mu d_\nu]+3[c_\mu b_\nu]+\lambda\{[a_\mu e_\nu]-2[b_\mu d_\nu]\}+\lambda^2\{[b_\mu e_\nu]+3[d_\mu c_\nu]\},$$

wobei $i, \mu, \nu = 1, 2, 3$.

Hieraus folgt die Punktdarstellung von N:

$$\varrho z_i = \lambda^2\{e_i[abe]+3a_i[cde]-3e_i[acd]-2b_i[bde]+6d_i[bcd]\}+\cdots.$$

Bilden wir jetzt:

$$D = [a+3b\lambda+3c\lambda^2+d\lambda^3,\quad b+3c\lambda+3d\lambda^2+e\lambda^3,\quad z] = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten. Es folgt:

$$(40.)\qquad D = \lambda^8\{3[ade][cde]-2[bde]^2\}+\cdots.$$

Es ist aber nun:

$$-\frac{j}{6} = [a+2b\lambda+c\lambda^2,\quad b+2c\lambda+d\lambda^2,\quad c+2d\lambda+e\lambda^2].$$

$$-\frac{l}{4} = \{-2[bce]+[ade]\}\lambda^2+\cdots.$$

Daher:

$$(41.)\quad \frac{j}{6}\cdot\frac{l}{4} = \{-2[bce][cde]+[ade][cde]\}\lambda^8+\cdots.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes K aber ist (vgl. § 3)

$$(42.)\quad \begin{cases} K = [xab][xde]-[xac][xce]+[xad][xcd] \\ \qquad\qquad +[xbc][xbe]-[xbd]^2+[xcd][xbc] = 0 \\ \quad = \mathrm{E}(\xi_1\xi_3-\xi_2^2). \end{cases}$$

Durch Einsetzen von $x_i = a_i+4b_i\lambda+\cdots+e_i\lambda^4$ in $K=0$ erhalten wir:

$$(43.)\quad \frac{\mathrm{HE}}{2} = \{[ade][cde]-[bde]^2+[cde][bce]\}\lambda^8+\cdots.$$

Wir erhalten deshalb für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten die Gleichung:

$$(44.)\quad \mathrm{D} = \mathrm{HE}+\frac{j}{6}\frac{l}{4} = 0.$$

§ 15.

Fünf covariante Kegelschnitte eines Büschels.

Herr *W. Gross* hat schon gezeigt *), dass der *Wendekegelschnitt, der durch die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten gelegte und der von den Wendetangenten der R_4 berührte Kegelschnitt in einem Büschel liegen.* Aber noch *zwei andere wichtige Kegelschnitte,* nämlich K *und* N, *gehören demselben Büschel an.* Diesen Kegelschnitten entsprechen fünf wichtige *Complexe zweiten Grades,* welche bei der *Raumcurve* ρ_4 auftreten.

Der Kegelschnitt K hat die Gleichung:

$$(42.)\quad K = [xab][xde]-[xac][xce]+[xad][xcd]+[xbc][xbe]-[xbd]^2+[xcd][xbc].$$

Die Tangentendarstellung von N ist:

$$(20^b.)\quad [xad]-3[xbc]+\lambda\{[xae]-2[xbd]\}+\lambda^2\{[xbe]-3[xcd]\} = 0;$$

die Gleichung von N deshalb:

$$(45.)\quad \begin{cases} \mathrm{N} = 4[xad][xbe]-12[xad][xcd]-12[xbc][xbe] \\ \qquad\qquad +36[xbc][xcd]-[xae]^2-4[xbd]^2+4[xae][xbd] = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung von S in Liniencoordinaten ist:

$$(17.)\quad (au)(eu)-4(bu)(du)+3(cu)^2 = 0,$$

---

*) Vgl. *W. Gross:* Ueber die Combinanten binärer Formensysteme etc. In.-Diss. Tübingen 1887. S. 45.

also in Punktcoordinaten:

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6c_1 & -6c_2 & -6c_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(46.)\quad \begin{cases} S = -8[xab][xde]+12[xce][xac]-8[xbe][xad] \\ \qquad -48[xbc][xcd]+[xae]^2+16[xbd]^2 = 0. \end{cases}$$

Es folgt sofort:

$$(47.)\quad \mathrm{N}+S+12K = 0,$$

die drei Kegelschnitte N, S, K gehören somit zu einem Büschel. Der Wendekegelschnitt schneidet nun R_4 in acht Punkten, deren Gleichung gegeben ist durch:

$$(41.)\quad \frac{j}{6}\cdot\frac{l}{4} = \{-2[bce][cde]+[ade][cde]\}\lambda^8+\cdots = 0.$$

Setzen wir ferner in $S=0$ die Ausdrücke: $x_i = a_i+4b_i\lambda+\cdots+e_i\lambda^4$ ein, so erhalten wir die Gleichung der acht Punkte, in welchen R_4 von S geschnitten wird, in:

$$\{-48[bce][cde]+16[bde]^2\}\lambda^8+\cdots = 0.$$

K liefert aber auf R_4 acht Schnittpunkte, deren Gleichung lautete:

$$(43.)\quad \{[ade][cde]-[bde]^2+[cde][bce]\}\lambda^8+\cdots = 0.$$

Für die *Gleichung des Wendekegelschnittes* $w = 0$ ergiebt sich deshalb:

$$(48.)\quad 16w = S+16K = 0.$$

Endlich erhalten wir nach § 14 *die Gleichung des Kegelschnittes, welcher die Berührungspunkte der Doppeltangenten enthält:*

$$(49.)\quad \mathrm{D} = w+2K = 0.$$

Die Grundpunkte des Büschels dieser Kegelschnitte entsprechen auf K vier Parameterwerthen, welche wir noch aufsuchen wollen.

Setzen wir

$$n_{ik} = a_i e_k + a_k e_i - 4(b_i d_k + b_k d_i) + 6c_i c_k,$$

so ist:

$$i = n_{11} - 4n_{12}\lambda + 2\{n_{13} + 2n_{22}\}\lambda^2 - 4n_{23}\lambda^3 + n_{33}\lambda^4,$$

$$\frac{A}{2} = m_0 m_6 - 6m_1 m_5 + 15m_2 m_4 - 10m_3^2 = n_{13} - n_{22},$$

$$3\Delta = \{-6n_{23}^2 + 2n_{33}n_{13} + 4n_{22}n_{33}\}\lambda^4 + \cdots.$$

Die Gleichung von S in Liniencoordinaten heisst:

$$S = \Sigma_{ik} n_{ik} u_i u_k = 0.$$

Stellt man aus der letzten Gleichung die Gleichung von S in Punktcoordinaten dar und setzt dann $\xi_1 = \lambda^2$; $\xi_2 = \lambda$; $\xi_3 = 1$, so erhält man die *Gleichung für die Schnittpunkte von K mit S.* Also:

$$\varphi = 0 = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \lambda^2 \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} & \lambda \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^4(n_{23}^2 - n_{22}n_{33}) + \cdots$$

oder:

$$2\varphi = \tfrac{1}{3} i A - \Delta = 0.$$

Wir wollen ferner die Determinanten der Kegelschnitte S und N angeben. Es ist:

$$C = (ii')^2(i'i'')^2(i''i)^2 = \frac{6}{27}\begin{vmatrix} 3n_{11} & -3n_{12} & n_{13}+2n_{22} \\ -3n_{12} & n_{13}+2n_{22} & -3n_{23} \\ n_{13}+2n_{22} & -3n_{23} & 3n_{33} \end{vmatrix}$$

und die Determinante von S:

$$\nabla_S = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{vmatrix}.$$

Man findet hieraus leicht:

$$(50.) \qquad 4.27\nabla_S = 18C - A(9B - 2A^2) \quad \text{oder} \quad 12\nabla_S = A_u + 32AE.$$

Ist $\nabla_S = 0$, *so gehen die sechs Wendetangenten von R_4 zu dreien durch zwei Punkte.*

Die Determinante von N ist gegeben durch (s. Gleichung (17.)):

$$\nabla_N = \Sigma \pm ([a_1 d_2] - 3[b_1 c_2])([a_2 e_3] - 2[b_2 d_3])([b_3 e_1] - 3[d_3 c_1]),$$

oder ausgerechnet:

$$\nabla_N = [ade][abe] - 3[ade][acd] + 2[abd][bdc] - 3[bce][abe] + 9[bcd][ace] - 18[bcd]^2$$

oder:

$$(51.) \qquad 3\nabla_N = \frac{A_u}{8} - \frac{AE}{2},$$

wie sich aus der späteren Darstellung von A_u und AE sofort ergiebt. *Verschwindet ∇_N, so gehen drei Doppeltangenten von R_4 durch einen Punkt.*

Die Gleichung des *Wendekegelschnittes w in Liniencoordinaten* nimmt eine sehr elegante Form an. Wir haben ihn (§ 10) als Ort der zweiten Polaren der Strahlen eines Büschels P in Bezug auf die Curve dritter Klasse Ψ_3 gefunden. Die Gleichung der zweiten Polaren der Geraden u' ist aber (25.)

$$(25.) \quad \begin{cases} (\gamma u')^2(au)+4(\beta u')^2(cu)+(\alpha u')^2(eu) \\ -4(\beta u')(\gamma u')(bu)+2(\gamma u')(\alpha u')(cu)-4(\alpha u')(\beta u')(du) = 0. \end{cases}$$

Besteht nun die lineare Gleichung:

$$t_1(\gamma u')-2t_2(\beta u')+t_3(\alpha u') = 0,$$

so ergiebt sich die Gleichung der Polokonika oder des Ortes der zweiten Polaren dieses Büschels in Liniencoordinaten durch *):

$$(52.) \qquad \begin{vmatrix} 0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & (au) & (bu) & (cu) \\ t_2 & (bu) & (cu) & (du) \\ t_3 & (cu) & (du) & (eu) \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir hier aber:

$$t_1 = -4[BE]+2[CD],$$
$$t_2 = 8[AE]-[BD],$$
$$t_3 = -4[AD]+2[BC],$$

so erhalten wir die Gleichung des Wendekegelschnittes (§ 10, (28.)).

§ 16.

Die Doppelpunkte von R_4 und die durch sie gelegten Tangenten von R_4.

Um die Gleichung für die sechs Parameter der Doppelpunkte von R_4 zu bilden, suchen wir zunächst die zu R_4 perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung auf. R_4 ist gegeben durch:

$$(1.) \qquad \varrho x_i = a_i+4b_i\lambda+6c_i\lambda^2+4d_i\lambda^3+e_i\lambda^4.$$

*) S. *Cayley:* Mem. on curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147, p. 416 oder *Durège:* Die ebenen Curven dritter Ordnung S. 178.

Ein zu R_4 perspectiver Strahlenbüschel zweiter Ordnung sei gegeben durch:

$$\sum_1^3 {}_i x_i(m_i+n_i\lambda+p_i\lambda^2) = 0.$$

Werden die Ausdrücke (1.) in die zweite Gleichung eingesetzt, so muss diese identisch verschwinden. Es muss deshalb jede gleich Null gesetzte Determinante folgender Matrix einen zu R_4 perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung ergeben:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 & 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 & 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 & 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 & 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 & 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 & \lambda^2 x_1 & \lambda^2 x_2 & \lambda^2 x_3 \end{array}\right|.$$

Fügen wir hier als neunte Horizontalreihe einmal 0 0 0 0 0 0 x_1 x_2 x_3, ein anderes Mal x_1 x_2 x_3 0 0 0 0 0 0 hinzu, so ergeben sich zwei projective Kegelschnittbüschel, welche R_4 erzeugen. Die Grundpunkte des ersten Büschels sind die drei Doppelpunkte und der Punkt von R_4, welchem $\lambda=\infty$ zukommt; die Grundpunkte des zweiten sind die drei Doppelpunkte und der Punkt von R_4, dem $\lambda=0$ zukommt. Durch folgende Gleichung wird demnach ein Kegelschnitt dargestellt, welcher die Doppelpunkte und ausserdem die Punkte $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ enthält:

$$(53^a.)\qquad \left|\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 & 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 & 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 & 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 & 6c_1 & 6c_2 & 6c_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 & 4d_1 & 4d_2 & 4d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right| = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$(53^b.)\quad \left\{\begin{array}{l} 4[xab]\{4^3.6[bcd][xde]-4.6^2[bce][xce]+4^3[bde][xbe]-4.6[cde][xae]\} \\ -6[xac]\{4^2.6[acd][xde]-\ 6^2[ace][xce]+4^2[ade][xbe]\} \\ +4[xad]\{\ 4^3[abd][xde]-4.6\ [abe][xce]+4\ [ade][xae]\} \\ -\ [xae]\{4^2.6[abc][xde]-\ 4^2[abe][xbe]+6\ [ace][xae]\} \ = \ 0. \end{array}\right.$$

Setzt man in diese Gleichung: $x_i = a_i + 4b_i\lambda + \cdots + e_i\lambda^4$ ein, so erhält man nach Weghebung des Factors λ *die Gleichung für die sechs Parameter der Doppelpunkte von* R_4.

Also:

$$(54.)\quad \left\{\begin{array}{rl} \Omega \ = & 4\lambda^6\{4[abe]\{4.6^2[bce][cde]-4^3[bde]^2+4.6[cde][ade]\} \\ & \qquad -6[ace]\{6^2[ace][cde]-4^2[ade][bde]\} \\ & \qquad +4[ade]\{4.6[abe][cde]-4[ade]^2\}\}+\cdots \ = \ 0. \end{array}\right.$$

Mit dieser Gleichung stellen wir zusammen *die Gleichung sechster Ordnung in* λ, welche *die Parameter der von den Doppelpunkten an* R_4 *gelegten Tangenten liefert.* Zur Herstellung der letzteren betrachten wir die Abbildung von R_4 auf K. Die Punktpaare von K, welche den Berührungspunkten der Doppeltangenten von R_4 entsprechen, bestimmen durch ihre Verbindungen die Grundtangenten einer Kegelschnittschaar, deren Poldreieck folgende Eigenschaft hat. Seine Seiten treffen K in den sechs Punkten, welche den Doppelpunkten von K entsprechen, und die durch seine Ecken gelegten Tangenten berühren K in den sechs Punkten, welche die gesuchte Form $\Theta = 0$ geben.

Nun ist die Gleichung jener Kegelschnittschaar (§ 5, (15.)) gegeben durch:

$$F = 6Au_3^2 - 3Bu_3u_2 + C(2u_3u_1 + u_2^2) - 3Du_2u_1 + 6Eu_1^2 = 0,$$

wobei die Grössen $A, B, \ldots E$ den drei Gleichungen:

$$Aa_i - Bb_i + Cc_i - Dd_i + Ee_i \ = \ 0$$

genügen.

Wir denken uns die Schaar durch zwei solcher Werthsysteme der Grössen $A, \ldots E$ bestimmt und suchen drei Kegelschnitte U, V, W auf, welche dem Diagonaldreieck der Schaar einbeschrieben sind. Die *Jacobi*sche Curve dieser Kegelschnitte ist dann bekanntlich das Product der drei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Ecken des Poldreieckes der Schaar sind.

Da:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 2Cu_3 - 3Du_2 + 12Eu_1; \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = -3Bu_3 + 2Cu_2 - 3Du_1;$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_3} = 12Au_3 - 3Bu_2 + 2Cu_1,$$

so erhalten wir, wenn wir setzen $[AB] = AB' - A'B$ etc., für U, V, W die Gleichungen:

$$\begin{aligned} U &= 6[BC]u_3^2 + 6[CD]u_2^2 + 36[DE]u_1^2 - 9[BD]u_3u_2 - 24[CE]u_2u_1 \\ &\qquad - \{6[CD] - 36[BE]\}u_1u_3 = 0, \\ V &= -24[AC]u_3^2 - 9[BD]u_2^2 - 24[CE]u_1^2 + \{6[BC] + 36[AD]\}u_3u_2 \\ &\qquad + \{6[CD] + 36[BE]\}u_2u_1 - 144[AE]u_1u_3 = 0, \\ W &= 36[AB]u_3^2 + 6[BC]u_2^2 + 6[CD]u_1^2 - 24[AC]u_3u_2 - 9[BD]u_2u_1 \\ &\qquad - \{6[BC] - 36[AD]\}u_1u_3 = 0. \end{aligned}$$

Bilden wir jetzt die *Jacobi*sche Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_3} & \frac{\partial U}{\partial u_2} & \frac{\partial U}{\partial u_1} \\ \frac{\partial V}{\partial u_3} & \frac{\partial V}{\partial u_2} & \frac{\partial V}{\partial u_1} \\ \frac{\partial W}{\partial u_3} & \frac{\partial W}{\partial u_2} & \frac{\partial W}{\partial u_1} \end{vmatrix} = 0,$$

und setzen in dieselbe ein: $u_3 = \lambda^2$; $u_2 = -2\lambda$; $u_1 = 1$, so erhalten wir hieraus *die Gleichung* $\Theta = 0$. Es ist also:

$$(55^a.) \qquad \Theta = \lambda^6 \begin{vmatrix} 12[BC] & -9[BD] & -6[CD]+36[BE] \\ -48[AC] & 6[BC]+36[AD] & -144[AE] \\ 72[AB] & -24[AC] & -6[BC]+36[AD] \end{vmatrix} + \cdots,$$

oder weiter ausgerechnet:

$$(55^b.) \quad \begin{cases} \Theta = 27\lambda^6\{-16[BC]^3 + 6.16[AC][BC][BD] - 16.16[AC]^2[CD] \\ +96[AB]\{16[AC][CE] - 36[AB][DE] + [BC][CD] - 6[BC][BE]\}\} + \cdots. \end{cases}$$

Nun bringen wir die Gleichung $\Omega = 0$ noch auf eine andere Form; wir dürfen nämlich setzen: $[abc] = [DE]$; $[acd] = [BE]$ und so fort, und erhalten deshalb:

$$(54^b.) \quad \begin{cases} -\frac{\Omega}{4} = \lambda^6\{\{[BC]^3 - 6[AC][BC][BD] + 16[AC]^2[CD]\}16 \\ \qquad + 24[AB]\{-24[CD][AD] - 8[CD][BE] + 9[BD]^2\}\} + \cdots. \end{cases}$$

Also:

$$\frac{\Theta}{27} - \frac{\Omega}{4} = 24[AB]\chi\lambda^6 + \cdots,$$

wobei:

$$\chi = 9[BD]^2+64[AC][CE]-144[AB][DE] \\ -24[BC][BE]-24[AD][CD]-4[BC][CD]$$

ist; $\chi=0$ stellt aber die Bedingung dar, unter welcher R_4 einen dreifachen Punkt hat, denn es ist:

$$\begin{vmatrix} 12A & -3B & 2C & -3D \\ 12A' & -3B' & 2C' & -3D' \\ -3B & 2C & -3D & 12E \\ -3B' & 2C' & -3D' & 12E' \end{vmatrix} = -9\chi,$$

χ ist demnach eine Invariante von f, und da $\frac{j}{6} = -[AB]\lambda^6+\cdots$, so haben wir die Gleichung:

$$(56.) \qquad \frac{\Theta}{27}-\frac{\Omega}{4} = -4\chi j\ ^{*}).$$

Multiplicirt man in dieser Gleichung auf beiden Seiten mit l, so erkennt man, dass der durch die Punkte $\Theta=0$ gelegte Kegelschnitt ausserdem R_4 noch in den Punkten $l=0$ schneidet.

χ kann leicht durch A_u, A und E ausgedrückt werden.

Als Invariante von l ist A_u gegeben durch:

$$(57.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_u}{8} = 16[AD][BE]+4[BC][CD]-8[BE][BC] \\ -8[CD][AD]-64[AE]^2-[BD]^2+16[AE][BD], \end{aligned} \right.$$

aber

$$\frac{A}{2} = m_0m_6-6m_1m_5+15m_2m_4-10m_3^2.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
E^4m_0m_6 &= 4[\alpha\beta a][\beta\gamma e] = -4[\alpha\beta\gamma][a\beta e]+4[\alpha\beta e][a\beta\gamma], \\
E^4m_2m_4 &= \qquad\qquad = \qquad 4[\alpha\beta e][a\beta\gamma], \\
E^4m_1m_5 &= 2[\beta\gamma d][\alpha\gamma a] = \quad 2[\alpha\beta\gamma][d\gamma a]+2[\beta\gamma a][\alpha\gamma d], \\
E^4m_2m_4 &= \qquad\qquad = \qquad 2[\beta\gamma a][\alpha\gamma d], \\
E^4m_2m_4 &= 2[\alpha\gamma b][\beta\gamma c] = -2[\alpha\beta\gamma][b\gamma c]+2[\alpha\gamma c][\beta\gamma b], \\
E^4m_3^2 &= \qquad\qquad = \qquad 2[\alpha\gamma c][\beta\gamma b],
\end{aligned}$$

folglich:

$$-\frac{E^4A}{2} = 4[\alpha\beta\gamma]\{[a\beta e]+3[d\gamma a]+5[b\gamma c]\}.$$

---

*) Diese Gleichung giebt in anderer Form Herr *Brill:* Ueber rationale Curven vierter Ordnung. Math. Ann. Bd. 12 S. 111.

Setzt man hier die Werthe von α_i, β_i, γ_i aus Gleichung (11ᵇ.) § 3 ein, so folgt:

$$(58.)\quad \begin{cases} -\frac{EA}{2} = -[BC][CD]-[BC][BE]+[BD]^2+[BD][AE]-[CD][AD] \\ \qquad -6[AD][BE]+6[CE][AC]+10[AE]^2-10[AB][DE], \end{cases}$$

und es ergiebt sich:

$$(59.)\quad 3\chi = \frac{5A_u}{8}-16AE.$$

§ 17.

Berechnung der Form Ω.

Wir haben jetzt noch Ω durch Elementarcovarianten von f auszudrücken, wozu die Formen f, il, l^3 und j ausreichen. f und i müssen aber dazu auf eine passende Form gebracht werden.

Es ist: $-fE^2 = 2[\beta\gamma e]\lambda^6+\cdots$.

Nach Gleichung (11ᵇ.) ist aber:

$$2[\beta\gamma e] = [-d[abe]-d[acd]+c[ace]+c[bcd]-b[bce], \\ -d[bcd]+c[bce]-b[bde]+a[cde], e].$$

Nach Ausrechnung dieser Determinante und Einsetzen von $[AB]$ etc. für $[cde]$ etc. folgt:

$$(60.)\quad \begin{cases} -fE^2 = \{-[AC]^2[CD]-[AC]^2[BE]+[AD][BD][AC]+2[AD][AE][AC] \\ \quad -[AD]^3+[AB]\{2[AD][CD]-2[AE][BD]+[BC][CD]+[BE][AD] \\ \qquad +[BC][BE]-[AE]^2-[BD]^2\}\}\lambda^6+\cdots. \end{cases}$$

Für i haben wir:

$$\frac{i}{2} = (m_2m_6-4m_3m_5+3m_4^2)\lambda^4+\cdots.$$

Nun ist nach Gleichung (30.):

$$\begin{aligned} E^4m_2m_6 &= 4[\beta\gamma e][\alpha\beta c] = 4[\alpha\beta\gamma][\beta ce]+4[\beta\gamma c][\alpha\beta e], \\ E^4m_4^2 &= \qquad = \qquad 4[\beta\gamma c][\alpha\beta e], \\ E^4m_3m_5 &= 2[\beta\gamma d][\alpha\gamma c] = -2[\alpha\beta\gamma][c\gamma d]+2[\beta\gamma c][\alpha\gamma d], \\ E^4m_4^2 &= \qquad = \qquad 2[\beta\gamma c][\alpha\gamma d]. \end{aligned}$$

Daher:

$$E^4(m_2m_6-4m_3m_5+3m_4^2) = 2[\alpha\beta\gamma]\{2[\beta ce]+4[c\gamma d]\}.$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke von α_i, β_i, γ_i nach (11ᵇ.) folgt daher:

$$E\frac{i}{2} = \{[cde][abe]-3[cde][acd]+4[bce][bde]-[bce]^2\}\lambda^4+\cdots,$$

ferner ist:

$$(39.)\qquad \frac{l}{4} = \{2[bce]-[ade]\}\lambda^2+\cdots.$$

Folglich:

$$(61.)\qquad \mathrm{E}\frac{i}{2}\frac{l}{4} = \{[AB][CD]-3[AB][BE]+4[AE][AC]-[AD]^2\}\times\{2[AD]-[BC]\}\lambda^6+\cdots,$$

ferner ist nach Gleichung (39.)

$$(62.)\qquad -\frac{l^3}{64} = \{-8[AD]^3+12[AD]^2[BC]-6[AD][BC]^2+[BC]^3\}\lambda^6+\cdots,$$

und endlich:

$$(54^b.)\qquad \begin{cases} -\frac{\Omega}{4} = \{16\{[BC]^3-6[AC][BC][BD]+16[AC]^2[CD]\} \\ \qquad +24[AB]\{-24[CD][AD]-8[CD][BE]+9[BD]^2\}\}\lambda^6+\cdots. \end{cases}$$

Bilden wir nun den Ausdruck:

$$-16\mathrm{E}^2f-4\mathrm{E}\frac{il}{8}+\frac{l^3}{64}-\frac{1}{16}\frac{\Omega}{4} = \mathrm{P},$$

so folgt:

$$\mathrm{P} = [AB]\varDelta\lambda^6+\cdots,$$

wobei:

$$\varDelta = -16[AC][CE]+4[AD][CD]+40[AD][BE]-32[AE][BD]+4[BC][BE]+2[BC][CD]-16[AE]^2-\tfrac{5}{2}[BD]^2.$$

Oder nach Gleichung (57.) und (58.):

$$6\varDelta = 16\frac{\mathrm{AE}}{2}-\frac{\mathrm{A}_u}{8};$$

$\varDelta$ ist somit eine Invariante von f, und da:

$$\frac{j}{6} = -[AB]\lambda^6+\cdots,$$

erhalten wir:

$$(63.)\qquad \frac{1}{16}\frac{\Omega}{4} = -16\mathrm{E}^2f-4\mathrm{E}\frac{il}{8}+\frac{l^3}{64}+\frac{j}{36}\left(8\mathrm{AE}-\frac{\mathrm{A}_u}{8}\right).$$

§ 18.

Specielle Fälle.

Wir betrachten zuerst den Fall, für welchen i identisch verschwindet. Es ist dann f Covariante sechster Ordnung einer biquadratischen Form *) und:

$$i=0;\quad \varDelta=0;\quad l=0;\quad \mathrm{A}_u=0;\quad \varphi=0;\quad p=0.$$

---

*) S. *Clebsch* a. a. O. S. 447.

Daher (§ 3):

$$j = \frac{f}{3}\frac{A}{2}; \quad \frac{1}{16}\frac{\Omega}{4} = f\mathrm{E}\left\{-16\mathrm{E}+\frac{1}{27}\mathrm{A}^2\right\}.$$

Wir haben es zu thun mit der lemniskatischen Curve R_4, bei welcher die Doppelpunkte mit den Wendepunkten sich vereinigen. Der Wendekegelschnitt w wird unbestimmt, während die übrigen der in § 15 bestimmten Curven des Büschels zusammenfallen.

Zweitens betrachten wir den Fall, für welchen φ identisch verschwindet, ohne dass $i = 0$.

Da $2\varphi = \frac{1}{3}i\mathrm{A} - \varDelta$, so ist jetzt i das Quadrat einer quadratischen Form und zwar der Form l. Der Kegelschnitt S des Büschels wird unbestimmt. R_4 ist dritter Klasse. —

Wir haben schon bemerkt, dass unsere Formeln unbrauchbar werden, sobald R_4 einen Undulationspunkt hat. Trotzdem können wir durch die Gleichungen (33.) eine Curve bestimmen für den Fall, dass die Invariante E verschwindet. In diesem Falle haben alle Quadrupel der Fundamentalinvolution drei gemeinsame Punkte. Es ist nämlich:

$$(9.) \quad \begin{cases} m_0 A - m_1 B + m_2 C - m_3 D + m_4 E = 0, \\ m_1 A - m_2 B + m_3 C - m_4 D + m_5 E = 0, \\ m_2 A - m_3 B + m_4 C - m_5 D + m_6 E = 0. \end{cases}$$

Setzt man hier zunächst $E = 0$ und $A', B', \ldots D'$ für $A, B, \ldots D$, so folgt, weil:

$$\mathrm{E} = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \end{vmatrix} = 0$$

ist, das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_0 A' - m_1 B' + m_2 C' - m_3 D' &= 0, \\ m_1 A' - m_2 B' + m_3 C' - m_4 D' &= 0, \\ m_2 A' - m_3 B' + m_4 C' - m_5 D' &= 0, \\ m_3 A' - m_4 B' + m_5 C' - m_6 D' &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man aber in (9.) $A = 0$ und $B'', C'', \ldots E''$ für $B, C, \ldots E$, so folgt wiederum, wenn $\mathrm{E} = 0$ ist, das zuletzt angeschriebene Gleichungssystem, wenn in demselben $A', \ldots D'$ durch $B'', \ldots E''$ ersetzt werden. Es ist deshalb:

$$A' : B' : C' : D' = B'' : C'' : D'' : E''.$$

Es sind somit zwei Quadrupel der Fundamentalinvolution gegeben durch die Gleichungen:

$$U = F_3(\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad U_1 = \lambda F_3(\lambda) = 0,$$

wenn $F_3(\lambda)$ eine Form dritter Ordnung in λ ist. Die Functionaldeterminante von U und U_1 wird dann das Quadrat von $F_3(\lambda)$. Die Curve R_4 besitzt drei Undulationspunkte. Die Tangenten von R_4 in diesen Punkten bilden ein Dreieck, welchem doppelt unendlich viele Kegelschnitte umschrieben werden können. Jeder derselben kann an Stelle des Kegelschnittes K treten, welcher hier unbestimmt wird, und zu jedem Kegelschnitt K gehört eine Form f, sowie eine äquianharmonische Curve Ψ_3. Die Grundform f ist die Summe dreier sechsten Potenzen linearer Formen, welche die drei Undulationspunkte darstellen. $\mathrm{E} = 0$ ist, wie bekannt, die Bedingung dafür, dass f als Summe von drei sechsten Potenzen dargestellt werden kann und j ein Quadrat wird.

§ 19.

Bemerkung über die Discriminante von j.

Herr *Brill* hat gezeigt, dass die Discriminante der Wendepunktsgleichung rationale Factoren besitzt *). Die Discriminante von j besitzt deshalb auch rationale Factoren. Einer derselben kann sofort angegeben werden. Er ist E^3. Der andere Factor, „der Cuspidalfactor", würde durch die Bedingung gefunden werden, dass ein Quadrupel der Fundamentalinvolution einen dreifachen Punkt hat. Es müssten dann die Gleichungen:

$$C^2 - 3BD + 12EA = 0$$

und

$$72ACE - 27AD^2 + 9BCD - 27B^2E - 2C^3 = 0$$

bestehen. Setzt man hier $A + \tau A', \ldots E + \tau E'$ für $A, B, \ldots E$ ein, so ist das Eliminationsresultat von τ aus beiden Gleichungen der zweite Factor der Discriminante von j.

§ 20.

Schlussbemerkung.

Wie für die ebene rationale Curve vierter Ordnung alle Combinanten als Covarianten *einer* Form sechster Ordnung sich ergeben haben, so sind die Combinanten der rationalen Curve R_n $n$ter Ordnung in einem Raume

*) *Brill* a. a. O. S. 112.

von $(n-2)$ Dimensionen Covarianten *einer* Grundform $2(n-1)$ter Ordnung. Durch passende Coordinatentransformation lassen sich die Coordinaten von R_n als die $(n-2)$ten partiellen Differentialquotienten dieser Grundform darstellen. Zu einer Curve R_n gehört eine covariante Curve $(n-2)$ter Ordnung K, auf welche sie naturgemäss abgebildet ist*). Diejenigen $2(n-1)$ Schmiegungsräume $(n-3)$ter Dimension der Curve K, welche die ihnen entsprechenden Punkte von R_n enthalten, liefern die Grundform. So kann die Theorie der rationalen Raumcurve fünfter Ordnung auf *eine* Form achter Ordnung gegründet werden.

*) Vergl. dieses Journal, diesen Band: „Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven," S. 38 ff.

Aachen, im December 1887.

Nachschrift. Nachdem vorliegende Arbeit der Redaction des Journals eingesandt war, ist eine Dissertation des Herrn *E. Meyer:* „Die rationalen ebenen Curven vierter Ordnung und die binäre Form sechster Ordnung, Königsberg 1888" erschienen, in welcher das gleiche Thema behandelt wird. Diese Arbeit hat einen wesentlich algebraischen Charakter, während die hier vorliegende durch die geometrische Theorie auf die Form sechster Ordnung kommt. Beide führen zu denselben Resultaten und ergänzen einander mehrfach. Eine andere Dissertation über denselben Gegenstand hat Herr *W. Friedrich* verfasst: „Die rationale Plancurve vierter Ordnung im Zusammenhang mit der binären Form sechster Ordnung, Giessen 1886." Leider ist mir diese Arbeit nicht zugänglich gewesen.

April 1889.

Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage.

(Von Herrn *E. Netto* in Giessen.)

Wenn man diejenige Gleichung

$$h(x) \equiv c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m = 0$$

bestimmt, deren Wurzeln gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad g(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

befriedigen, und man wendet hierbei die Determinanten in gewöhnlicher Weise, nicht in der verkürzten *Bézout*schen Form an, dann ist $h(x)$ im Allgemeinen nicht der grösste gemeinsame Theiler von $f(x)$, $g(x)$, sondern gleich dem Producte aus diesem und einer Constanten, welche — nebenbei bemerkt — die Resultante der nicht gemeinsamen Factoren von $f(x)$, $g(x)$ wird. Multiplicirt man also $h(x)$ mit $(a_0 u + b_0 v)$, wo u, v willkürliche Constanten sind, und bedenkt, dass der erste Coefficient des gemeinsamen Theilers von $f(x)$, $g(x)$ ein Theiler von $(a_0 u + b_0 v)$ sein muss, so folgt, dass alle Producte $(a_0 u + b_0 v) c_\lambda$ durch c_0 theilbar sein müssen. Diese aus der Bedeutung von $h(x)$ unmittelbar ersichtliche Thatsache erscheint als ein Problem, sobald man lediglich mit den Determinanten operirt, durch welche $c_0, c_1, \dots c_m$ gegeben sind.

Etwas Aehnliches gilt, sobald man die Determinanten betrachtet, deren Verschwinden die Existenz von gemeinsamen Factoren der Functionen $f(x)$, $g(x)$ anzeigt. Werden z. B. die Constanten a_λ, b_λ so variirt, dass $f(x)$, $g(x)$ einen Theiler $(m+1)$ten Grades gemeinsam haben, so müssen alle c_λ in $h(x)$ gleich Null werden. Aber schon das Verschwinden von c_0 reicht für die Erkenntniss aus, dass auch die übrigen c_λ verschwinden. Es tritt also auch hier die Frage auf, wie sich dies durch Determinantenbetrachtungen erweisen lasse.

Auf diese Verhältnisse machte mich Herr *Weierstrass* aufmerksam; im Folgenden werde ich eine Lösung der angeregten Fragen geben. Dabei stütze ich mich auf die *Kronecker*schen Betrachtungen über Modulsysteme *), und es wird sich auch hier zeigen, dass die Einführung derselben „den mathematischen Resultaten eine nicht nur wünschenswerthe, sondern eigentlich allein in Beziehung auf Klarheit und Sicherheit befriedigende Fassung" zu geben im Stande und berufen ist.

Da überdies die Prinzipien der Beweise auch auf diejenigen Systeme übertragbar waren, welche Herr *Kronecker* im dritten Abschnitte seiner Arbeit untersucht hat, so habe ich die hierauf bezüglichen Resultate gleichfalls kurz angegeben und mir zugleich erlaubt, mit dem Titel meiner Arbeit anzudeuten, dass ich versucht habe, an die schöne *Kronecker*sche Abhandlung anzuknüpfen und dem dort angegebenen Richtwege zu folgen.

Wir legen den nachfolgenden Untersuchungen die beiden Systeme von unbestimmten Grössen

$$(1.)\quad \begin{cases} a_0, & a_1, & a_2, & \dots & a_{n-1}, & a_n, \\ b_0, & b_1, & b_2, & \dots & b_{n-1}, & b_n \end{cases}$$

zu Grunde. Setzen wir ferner für einen Augenblick

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2n-1} = 0, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{2n-1} = 0,$$

so können wir eine Determinante D_{2n} der Ordnung $2n$ in der Weise bilden, dass ihre erste Zeile die Elemente $a_0, a_1, \dots a_{2n-1}$, ihre zweite die Elemente $b_0, b_1, \dots b_{2n-1}$ besitzt. Die Elemente der dritten Zeile sollen gegen die der ersten um eine Stelle cyklisch verschoben werden, und also a_{2n-1}, $a_0, \dots a_{2n-2}$ sein; ebenso mögen die der vierten Zeile gegen die der zweiten verschoben werden, die der fünften gegen die der dritten u. s. f. Es entsteht also

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \cdot & \dots & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & \cdot \\ \cdot & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

*) *L. Kronecker,* dieses Journal. Bd. 99, S. 329—371.

Aus dieser Determinante der Ordnung $2n$ bilden wir eine Reihe von Subdeterminanten der Ordnung $(2n-2)$ durch Hinweglassung der beiden letzten Zeilen und zweier Colonnen von D_{2n}. Damit diese Determinanten nicht identisch verschwinden, muss die letzte Colonne von D_{2n} zu den weggestrichenen gehören, da sie in den ersten $(2n-2)$ Gliedern nur Nullen enthält. Durch Angabe der übrig gebliebenen Colonnen ist jede dieser Determinanten vollständig bestimmt, so dass

$$D_{2n-2}(i_1, i_2, \dots i_{2n-2}) \quad \text{oder kürzer} \quad |i_1, i_2, \dots i_{2n-2}|$$
$$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2n-2} \leqq 2n-1$$

als Bezeichnung völlig ausreicht, falls i_a die Colonne bezeichnet, welche in D_{2n} als die $i_a$te auftritt.

Ebenso bilden wir aus D_{2n} eine Reihe von Determinanten D_{2n-4} der Ordnung $(2n-4)$, indem wir in D_{2n} die letzten vier Zeilen und vier Colonnen streichen; zu den letzteren müssen die beiden letzten gehören, damit die Determinante nicht identisch verschwinde. Dann wählen wir wieder die Bezeichnung

$$D_{2n-4}(i_1, i_2, \dots i_{2n-4}) \quad \text{oder kürzer} \quad |i_1, i_2, \dots i_{2n-4}|$$
$$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2n-4} \leqq 2n-2,$$

und in gleicher Weise gehen wir weiter.

Hinsichtlich der Bezeichnungen sei erwähnt, dass die Punkte *zwischen* zwei mit Indices versehenen Grössen oder *zwischen* zwei Zahlen andeuten sollen, man möge das erste der beiden Glieder durch Vermehrung oder Verminderung des veränderlichen Index oder der Zahl um je eine Einheit bis zum letzten Gliede überführen; so ist $i_1, \dots i_4$ oder $7, \dots 3$ eine Abkürzung für i_1, i_2, i_3, i_4 resp. $7, 6, 5, 4, 3$.

Endlich sei die Gesammtheit aller $D_{2\varkappa}(i_1, \dots)$, für die $i_1 = 1$ ist, durch $D_{2\varkappa}^{(1)}$ angedeutet. —

Nach diesen Festsetzungen betrachten wir die Determinanten $D_{2\varkappa}$ hinsichtlich eines Modulsystems, welches aus allen Determinanten $D_{2\varkappa+2}^{(1)}$ besteht. Dies werde durch „(modd. $D_{2\varkappa+2}^{(1)}$)“ angedeutet. Soll das Modulsystem durch andere Grössen $E, F, \dots$ erweitert werden, so schreiben wir

$$(\text{modd.}\,(D_{2\varkappa+2}^{(1)}, E, F, \dots)).$$

Nun bilden wir eine Matrize C_1 aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+1)$ Colonnen, indem wir aus den ersten $2\varkappa$ Zeilen von D_{2n} unter den ersten $(n+\varkappa)$ Co-

lonnen die $i_1$te, $i_2$te, ... $i_{2\varkappa+1}$te Colonne herausgreifen; (die folgenden Colonnen würden nur Nullen liefern.)

Rechts hinter C_1 setzen wir eine zweite Matrize C_2 aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen, deren Elemente sämmtlich Nullen sind.

Unter C_1 setzen wir eine dritte Matrize C_3 aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+1)$ Colonnen, indem wir aus den ersten $2\varkappa$ Zeilen von D_{2n} unter den ersten $(n+\varkappa+1)$ Colonnen die (i_1+1)te, (i_2+1)te, ... $(i_{2\varkappa+1}+1)$te herausgreifen. (Unter der αten Colonne von C_1, die durch i_α bestimmt ist, steht also in C_3 die Colonne mit dem Index $i_\alpha+1$.)

Unter C_2 setzen wir eine vierte Matrize C_4 aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen, indem wir aus den ersten $2\varkappa$ Zeilen von D_{2n} unter den ersten $(n+\varkappa)$ Colonnen die $j_1$te, $j_2$te, ... $j_{2\varkappa-1}$te herausgreifen, ***dabei aber stets*** $j_1 = 1$ ***setzen;*** somit ist die erste Colonne in C_4 aus den Elementen a_0, b_0, 0, 0, ... gebildet.

Diese vier Matrizen geben zusammengefügt eine Determinante, welche vollkommen ausreichend mit

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3, & \dots & i_{2\varkappa+1}, & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ i_1+1, & i_2+1, & i_3+1, & \dots & i_{2\varkappa+1}+1, & 1, & j_2, & j_3, & \dots & j_{2\varkappa-1} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden kann.

Es ist ersichtlich, dass die dritte Zeile von C_3 mit der ersten von C_1, die vierte von C_3 mit der zweiten von C_1, und allgemein die $(2+\lambda)$te von C_3 mit der λten Zeile von C_1 für $\lambda = 1, 2, \dots (2\varkappa-2)$ übereinstimmt. Subtrahirt man also in (2.) die Elemente der 1ten, 2ten, ... $(2\varkappa-2)$ten Zeile von den entsprechenden der resp. $(2\varkappa+3)$ten, $(2\varkappa+4)$ten, ... $4\varkappa$ten, so treten in den letzten $(2\varkappa-2)$ Zeilen der umgewandelten Determinante (2.) innerhalb der ersten $(2\varkappa+2)$ Colonnen nur Nullen auf. Denn die $(2\varkappa+2)$te Colonne war die erste aus C_4. Macht man nun die $(2\varkappa+2)$te Colonne zur ersten und die $(2\varkappa+1)$te, $(2\varkappa+2)$te Zeile zur ersten resp. zweiten, dann zerfällt (2.) sofort in das Product zweier Determinanten

$$(3.)\qquad D_{2\varkappa+2}(1,\ i_1+1,\ i_2+1,\ \dots\ i_{2\varkappa+1}+1).D_{2\varkappa-2}(j_2-1,\ j_3-1,\ \dots\ j_{2\varkappa-1}-1).$$

Wir haben also

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix} \equiv 0 \ (\text{modd. } D_{2\varkappa+2}),$$

oder, da wir ja jede Determinante $D_{2\alpha}$, deren erste Colonne aus der *ersten*

von D_{2n} entlehnt ist, mit $D_{2a}^{(1)}$ bezeichnen wollen,

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix} \equiv 0 \ (\text{modd. } D_{2\varkappa+2}^{(1)}).$$

Nach dem *Laplace*schen Determinantensatze lässt sich (2.) noch anders darstellen, nämlich als Aggregat von Producten je zweier $D_{2\varkappa}$. Dazu combinirt man die ersten $2\varkappa$ Zeilen von (2.) mit den letzten $2\varkappa$ Zeilen, und weil C_2 nur Nullen einschliesst, so müssen alle Colonnen von C_4 in jede der Determinanten aufgenommen werden, die man aus den letzten $2\varkappa$ Zeilen bildet. Es können also in dem Aggregate höchstens $(2\varkappa+1)$ Summanden vorkommen. In Wirklichkeit kommen um so viel weniger vor, als Colonnen von C_3 mit solchen aus C_4 übereinstimmen, da dann wegen C_2 die gleichen Colonnen von C_3 durch Colonnensubtraction getilgt werden können. Es bleiben also in dem Aggregate genau $(2\varkappa+1-m)$ Summanden zurück, wenn m angiebt, wieviele der Zahlen in den beiden Indices-Reihen

$$(5.)\qquad \begin{cases} i_1+1, & i_2+1, & \dots & i_{2\varkappa+1}+1, \\ j_2, & j_3, & \dots & j_{2\varkappa-1} \end{cases}$$

unter einander übereinstimmen.

Die bisherigen Ueberlegungen ergeben somit den Hauptsatz:

I. *Zwischen Determinanten $D_{2\varkappa}$ und $D_{2\varkappa+2}$ besteht die Congruenz*

$$(6.)\qquad \Sigma \pm D_{2\varkappa}(i_1, \dots i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots i_{2\varkappa+1}) D_{2\varkappa}(1, j_2, \dots j_{2\varkappa-1}, i_\alpha+1) \equiv 0$$
$$(\text{modd. } D_{2\varkappa+2}^{(1)}).$$

Von besonderer Wichtigkeit ist der specielle Fall, in welchem der Reihe der i_α:

$$(7.)\qquad 1, \dots \alpha-1;\ \beta-1, \dots \beta+\mu-1;\ \gamma, \dots \gamma+\nu-1;\ \delta, \dots \delta+\pi-1;\ \dots$$

als Reihe der j_α die folgende

$$(8.)\qquad 1, \dots \alpha-1;\ \beta+1, \dots \beta+\mu-1;\ \gamma, \dots \gamma+\nu-1;\ \delta, \dots \delta+\pi-1;\ \dots$$

zugeordnet ist, und wobei wir annehmen müssen

$$\beta > \alpha;\quad \gamma > \beta+\mu;\quad \delta > \gamma+\nu;\quad \dots .$$

Ist $\mu = 1$, dann fallen die Glieder $\beta+1, \dots \beta+\mu-1$ in (8.) weg.

Bei der Festsetzung (7.), (8.) erhält man also für die Indices in C_3

$$(9.)\qquad 2, \dots \alpha;\ \beta, \dots \beta+\mu;\ \gamma+1, \dots \gamma+\nu;\ \delta+1, \dots \delta+\pi;\ \dots$$

und bei der *Laplace*schen Entwickelung bleiben von C_3 nur die Colonnen

mit den Indices zurück, welche (8.) und (9.) nicht gemeinsam haben, nämlich

$$(10.)\quad \alpha,\ \beta,\ \beta+\mu,\ \gamma+\nu,\ \delta+\pi,\ \dots .$$

Treten also die Indices $j_1, \dots j_{2\varkappa-1}$ in λ Folgen auf, deren erste $1, \dots \alpha-1$, deren zweite $\beta+1, \dots \beta+\mu-1$, deren dritte $\gamma, \dots \gamma+\nu-1$ ist, u. s. f., dann kommen in der Aggregat-Entwickelung (6.) genau $(\lambda+1)$ Glieder vor.

Unter diesen befindet sich ein Quadrat, nämlich dasjenige von

$$(11.)\quad |1, \dots \alpha-1,\ \beta, \dots \beta+\mu-1,\ \gamma, \dots \gamma+\nu-1,\ \dots|;$$

und dies wird daher modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ durch das Aggregat der übrigen Producte ausgedrückt. Entweder hat der erste, aus C_1 stammende Factor eines solchen Productes die Form

$$(12.)\quad |1, \dots \alpha-1,\ \beta-1, \dots \beta+\mu-1,\ \gamma, \dots \gamma+\nu-2,\ \delta, \dots \delta+\pi-1,\ \dots|,$$

und dann wollen wir diesen Factor gegen (11.) in sofern für reducirt erklären, als die Lücke zwischen den beiden ersten Indices-Folgen bei (12.) geringer ist, als sie es bei (11.) war; oder der zweite Factor hat die Form

$$(13.)\quad |1, \dots \alpha,\ \beta+1, \dots \beta+\mu-1,\ \gamma, \dots \gamma+\nu-1,\ \delta, \dots \delta+\pi-1,\ \dots|,$$

und hier besteht eine Reduction gegen (11.) in sofern, als die zweite Folge in (13.) um eine Einheit geringer geworden ist als in (11.).

Mit Hülfe dieser beiden Reductionen können wir nun nachweisen, dass $D^{(1)}_{2\varkappa}(1, i_2, \dots i_{2\varkappa})$ nach dem Modulsystem $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ betrachtet, alle Factoren von $D^{(1)}_{2\varkappa}(1, \dots 2\varkappa)$ besitzt, so dass also eine hinreichend hohe Potenz jedes $D^{(1)}_{2\varkappa}$ congruent Null nach dem Modulsysteme $(D^{(1)}_{2\varkappa+2}, D_{2\varkappa}(1, \dots 2\varkappa))$ werden wird.

Wir setzen voraus, der Beweis sei für jede Determinante

$$D_{2\varkappa}(1,\ i_2,\ i_3,\ \dots\ i_{2\varkappa})$$

geliefert, deren Indexsystem in weniger als λ Folgen zerfällt. Können wir beweisen, dass er dann auch für die Systeme mit λ Folgen gültig bleibt, dann ist der Satz allgemein dargethan, da er für $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $\dots$ $i_{2\varkappa} = 2\varkappa$ selbstverständlich ist.

Wir nehmen also an, das System von (11.) zerfiele in λ Folgen. Wenn dabei zunächst die Lücke zwischen den beiden ersten Folgen durch ein einziges Element ausfüllbar, also $\beta = \alpha+1$ ist, und die zweite Folge nur aus einem Elemente besteht, also $\mu = 1$ ist, dann beweisen die Glieder

(12.), (13.) den Satz. Denn aus (12.) wird in diesem Falle

$$|1, \;\ldots\; \alpha-1, \;\; \alpha, \;\; \alpha+1, \;\; \gamma, \;\ldots\; \gamma+\nu-2, \;\ldots|,$$

so dass eine Folge weniger vorhanden ist, und in (13.) verschwinden nach einer bei (8.) gemachten Bemerkung $\beta+1, \ldots \beta+\mu-1$. Für

$$|1, \;\ldots\; \alpha-1, \;\; \alpha+1, \;\; \gamma, \;\ldots\; \gamma+\nu-1, \;\ldots|$$

ist also der Satz bewiesen, da er für jeden Summanden des Aggregats gilt, welches das Quadrat dieser Determinante darstellt.

Wir nehmen ferner an, die Lücke zwischen den beiden ersten Folgen sei durch ein Element ausfüllbar, also $\beta = \alpha+1$, aber die zweite Folge bestehe jetzt aus zwei Elementen, so dass $\mu = 2$ ist. Dann reduciren (12.), (13.) diesen Fall auf den soeben behandelten. Denn durch (12.) wird die Lücke ausgefüllt, durch (13.) wird die zweite Folge auf ein Element reducirt. In gleicher Weise erfolgt der Nachweis, sobald die erste Lücke durch ein Element ausgefüllt werden kann, während die zweite Folge beliebig viele Elemente umfasst.

Besteht jetzt die erste Lücke aus zwei Elementen, ist also $\beta = \alpha+2$, während die zweite Folge nur ein Element enthält, also $\mu = 1$ ist, dann wird durch (12.) die Lücke verringert, durch (13.) die Elementenzahl der zweiten Folge reducirt u. s. f.

Aehnlich geht es weiter, und so ist der Beweis geliefert.

Bezeichnen wir nun

$$(14.) \qquad D^{(1)}_{2\alpha}(1,\; 2,\; 3, \;\ldots\; 2\alpha) = A_{2\alpha},$$

so folgt der Reihe nach für beliebige Indices $i, j, \ldots$

$$D^{(1)}_{2\varkappa}(1,\; i_2, \;\ldots\; i_{2\varkappa})^{\sigma} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(D^{(1)}_{2\varkappa+2},\; A_{2\varkappa})),$$

$$D^{(1)}_{2\varkappa+2}(1,\; j_2, \;\ldots\; j_{2\varkappa+2})^{\tau} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(D^{(1)}_{2\varkappa+4},\; A_{2\varkappa+2})),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und also ergiebt sich:

II. *Bedeutet ϖ eine hinlänglich hohe ganze Zahl, so ist*

$$(15.) \qquad D^{(1)}_{2\varkappa}(1,\; i_2 \;\ldots\; i_{2\varkappa})^{\varpi} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(A_{2\varkappa},\; A_{2\varkappa+2}, \;\ldots\; A_{2n} = D_{2n})).$$

Um etwas Entsprechendes für Determinanten zu finden, deren erster Index von 1 verschieden ist, nehmen wir ein beliebiges $D_{2\varkappa}(i_1, \ldots i_{2\varkappa})$ und rändern dasselbe durch je eine erste Zeile und Colonne derart, dass erstere aus a_0 und der ersten Zeile von $D_{2\varkappa}$ besteht, letztere aus a_0, a_0, b_0 und $2\varkappa-2$ Nullen. Dann stimmen die beiden ersten Zeilen überein, so dass der Werth der Determinante gleich Null ist. Entwickelt man nun die geränderte Deter-

minante nach den Gliedern der ersten Zeile, so wird das erste Glied $a_0|i_1, \dots i_{2\varkappa}|$, und jedes folgende hat die Form $a_\lambda D_{2\varkappa}^{(1)}$, besitzt also modd. $D_{2\varkappa+2}^{(1)}$ alle Factoren von $A_{2\varkappa}$. Dasselbe ist also für $a_0|i_1, \dots i_{2\varkappa}|$ der Fall; das Gleiche wird für $b_0|i_1, \dots i_{2\varkappa}|$ und demnach auch für die Combination beider, nämlich für

$$(a_0 u + b_0 v) D_{2\varkappa}(i_1, \ i_2, \ \dots \ i_{2\varkappa})$$

eintreten, wobei u, v unbestimmte Grössen bedeuten. Also folgt:

III. *Bedeutet ϖ eine hinlänglich hohe ganze Zahl, so ist*

$$(16.) \quad (a_0 u + b_0 v)^{\varpi} D_{2\varkappa}^{\varpi}(i_1, \ \dots \ i_{2\varkappa}) \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(A_{2\varkappa}, \ A_{2\varkappa+2}, \ \dots \ A_{2n} \ = \ D_{2n})).$$

Wir wollen noch einen speciellen Fall von (6.) in Betracht ziehen. Die Zahlen $i_1, \ i_2, \ \dots \ i_{2\varkappa+1}$ nehmen wir willkürlich an, greifen drei von ihnen $i_\alpha, \ i_\beta, \ i_\gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ heraus und setzen

$$j_2 = i_1 + 1, \ \dots \ j_\alpha = i_{\alpha-1} + 1, \ j_{\alpha+1} = i_{\alpha+1} + 1, \ \dots \ j_{\beta-1} = i_{\beta-1} + 1, \ j_\beta = i_{\beta+1} + 1, \ \dots$$
$$j_{\gamma-2} = i_{\gamma-1} + 1, \ j_{\gamma-1} = i_{\gamma+1} + 1, \ \dots \ j_{2\varkappa-1} = i_{2\varkappa+1} + 1.$$

Dann stimmen die beiden Reihen (5.) in $(2\varkappa - 2)$ Zahlen überein, und die Entwickelung (6.) enthält nur drei Summanden. Man erhält:

$$(17.) \quad \begin{cases} \qquad \Sigma \pm |i_1, \ \dots \ i_{\alpha-1}, \ i_{\alpha+1}, \ \dots \ i_{2\varkappa+1}| \\ \times |1, \ i_1 + 1, \ \dots \ i_{\beta-1} + 1, \ i_{\beta+1} + 1, \ \dots \ i_{\gamma-1} + 1, \ i_{\gamma+1} + 1, \ \dots \ i_{2\varkappa+1} + 1| \equiv 0 \\ \qquad (\text{modd.}\ D_{2\varkappa+1}^{(1)}). \end{cases}$$

Die Summe umfasst hierbei ausser dem aufgeschriebenen noch zwei andere Glieder, welche aus jenem entstehen, indem man α, β, γ durch β, α, γ und γ, α, β ersetzt. Dabei erhält der erste und der dritte Summand das positive, der zweite das negative Vorzeichen.

Setzen wir in (17.) $i_\gamma = i_{2\varkappa+1} = n + \varkappa$, also $i_\beta < n + \varkappa$, so wird

$$i_{2\varkappa+1} + 1 = n + \varkappa + 1,$$

und die entsprechende Colonne enthält nur Nullen. Dann fällt das dritte Glied der Summe in (17.) fort, und es entsteht

$$(18.) \quad \begin{cases} \dfrac{|i_1, i_2, \dots i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots i_{2\varkappa}, n+\varkappa|}{|1, i_1+1, \dots i_{\alpha-1}+1, i_{\alpha+1}+1, \dots i_{2\varkappa}+1|} \\ \equiv \dfrac{|i_1, i_2, \dots i_{\beta-1}, i_{\beta+1}, \dots i_{2\varkappa}, n+\varkappa|}{|1, i_1+1, \dots i_{\beta-1}+1, i_{\beta+1}+1, \dots i_{2\varkappa}+1|} \ (\text{modd.}\ D_{2\varkappa+2}^{(1)}). \end{cases}$$

Der Quotient auf der linken Seite ist folglich modd. $D_{2\varkappa+2}^{(1)}$ von α unabhängig. Nun möge der Reihe nach sein:

$$
\begin{array}{llll}
i_1 = 1, \;\ldots & & i_{2\varkappa-1} = 2\varkappa-1, & i_{2\varkappa} = n+\varkappa-1,\\
i_1 = 1, \;\ldots & i_{2\varkappa-2} = 2\varkappa-2, & i_{2\varkappa-1} = n+\varkappa-2, & i_{2\varkappa} = n+\varkappa-1,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
i_1 = 1, & i_2 = n-\varkappa+1, \;\ldots & & i_{2\varkappa} = n+\varkappa-1,\\
i_1 = n-\varkappa, & i_2 = n-\varkappa+1, \;\ldots & & i_{2\varkappa} = n+\varkappa-1.
\end{array}
$$

Dann liefert (18.), falls man α, β der Reihe nach gleich $2\varkappa$, $2\varkappa-1$, dann gleich $2\varkappa-1$, $2\varkappa-2$, u. s. f. annimmt, die Congruenzen modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$

$$
(19.)\quad \begin{cases}
\quad |1, \;\ldots\; 2\varkappa-1, \;\; n+\varkappa|^2\\
\equiv |1, \;\ldots\; 2\varkappa|.|1, \;\ldots\; 2\varkappa-2, \;\; n+\varkappa-1, \;\; n+\varkappa|,\\
\quad |1, \;\ldots\; 2\varkappa-2, \;\; n+\varkappa-1, \;\; n+\varkappa|^2\\
\equiv |1, \;\ldots\; 2\varkappa-1, \;\; n+\varkappa|.|1, \;\ldots\; 2\varkappa-3, \;\; n+\varkappa-2, \;\ldots\; n+\varkappa|,\\
\cdots\\
\quad |1, \;\; n-\varkappa+2, \;\ldots\; n+\varkappa|^2\\
\equiv |1, \;\; 2, \;\; n-\varkappa+3, \;\ldots\; n+\varkappa|.|n-\varkappa, \;\ldots\; n+\varkappa|.
\end{cases}
$$

Setzt man ferner in (18.) ein

$$i_1 = 1, \;\ldots\; i_\alpha = \alpha, \;\; i_{\alpha+1} = i_\beta = \alpha+\tau, \;\; i_{\alpha+2} = n-\varkappa+\alpha+1, \;\ldots\; i_{2\varkappa} = n+\varkappa-1,$$

dann entsteht

$$
(20.)\quad \begin{cases}
\dfrac{|1, \ldots \alpha-1, \alpha+\tau, n-\varkappa+\alpha+1, \ldots n+\varkappa|}{|1, \ldots \alpha-1, \alpha, \alpha+\tau+1, n-\varkappa+\alpha+2, \ldots n+\varkappa|}\\[2ex]
\equiv \dfrac{|1, \ldots \alpha, n-\varkappa+\alpha+1, \ldots n+\varkappa|}{|1, \ldots \alpha+1, n-\varkappa+\alpha+2, \ldots n+\varkappa|} \quad (\text{modd. } D^{(1)}_{2\varkappa+2}),
\end{cases}
$$

so dass die linke Seite von τ unabhängig ist.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das Schema der folgenden Determinanten:

$$
(21.)\quad \begin{cases}
|1, \;\ldots\; 2\varkappa-1, \;\; 2\varkappa+\sigma|,\\
|1, \;\ldots\; 2\varkappa-2, \;\; 2\varkappa-1+\sigma, \;\; n+\varkappa|,\\
|1, \;\ldots\; 2\varkappa-3, \;\; 2\varkappa-2+\sigma, \;\; n+\varkappa-1, \;\; n+\varkappa|,\\
\cdots\\
|1, \;\; 2+\sigma, \;\; n-\varkappa+3, \;\ldots\; n+\varkappa|,\\
|1+\sigma, \;\; n-\varkappa+2, \;\ldots\; n+\varkappa|,
\end{cases}
$$

wobei in allen Zeilen der veränderliche Buchstabe σ die Werthe $0, 1, \ldots n-\varkappa$ durchlaufen soll. Es umfasst dies $2\varkappa$ Zeilen, deren jede aus $(n-\varkappa+1)$ Determinanten bestehen wird. Die Glieder der αten Zeile stimmen in den

ersten $(2\varkappa-\alpha)$ und in den letzten $(\alpha-1)$ Indices überein; erstere lauten $1, 2, \dots 2\varkappa-\alpha$, letztere $n+\varkappa-\alpha+1, \dots n+\varkappa$, während $i_{2\varkappa-\alpha+1}$ von $2\varkappa-\alpha+1$ bis $n+\varkappa-\alpha$ läuft. Das letzte Glied der αten Zeile lautet somit

$$|1,\ 2,\ \dots\ 2\varkappa-\alpha,\ n+\varkappa-\alpha,\ \dots\ n+\varkappa|,$$

und ebenso das erste der $(\alpha+1)$ten Zeile.

Aus (19.) folgt, dass die Glieder der ersten Colonne von (21.) eine geometrische Reihe bilden; aus (20.), dass das Verhältniss der einzelnen Glieder für jede einzelne Zeile dasselbe ist. Wenn wir deshalb den grössten gemeinsamen Theiler aller Glieder der αten Zeile mit δ_α bezeichnen, dann können wir die Werthe der Determinanten in (21.) auf nachstehende Weise ausdrücken, stets modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ genommen:

$$\begin{array}{lllll}
\delta_1 c_0, & \delta_1 c_1, & \delta_1 c_2, & \dots & \delta_1 c_{n-\varkappa}, \\
\delta_2 c_0, & \delta_2 c_1, & \delta_2 c_2, & \dots & \delta_2 c_{n-\varkappa}, \\
\delta_3 c_0, & \delta_3 c_1, & \delta_3 c_2, & \dots & \delta_3 c_{n-\varkappa}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{2\varkappa} c_0, & \delta_{2\varkappa} c_1, & \delta_{2\varkappa} c_2, & \dots & \delta_{2\varkappa} c_{n-\varkappa}.
\end{array}$$

Soeben zeigten sich aber die Gleichheiten

$$\delta_1 c_{n-\varkappa} = \delta_2 c_0, \quad \delta_2 c_{n-\varkappa} = \delta_3 c_0, \quad \dots \quad \delta_{2\varkappa-1} c_{n-\varkappa} = \delta_{2\varkappa} c_0,$$

aus denen zu schliessen ist

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{c_{n-\varkappa}}{c_0}, \quad \delta_3 = \delta_1 \left(\frac{c_{n-\varkappa}}{c_0}\right)^2, \quad \dots \quad \delta_{2\varkappa} = \delta_1 \left(\frac{c_{n-\varkappa}}{c_0}\right)^{2\varkappa-1},$$

so dass man setzen kann

$$\delta_1 = \delta . c_0^{2\varkappa-1}, \quad \delta_2 = \delta . c_0^{2\varkappa-2} c_{n-\varkappa}, \quad \delta_3 = \delta . c_0^{2\varkappa-3} c_{n-\varkappa}^2, \quad \dots \quad \delta_{2\varkappa} = \delta . c_{n-\varkappa}^{2\varkappa-1}.$$

Hierbei steht es freilich nicht mehr fest, ob die neueingeführte Grösse δ eine ganze Function der unbestimmten Grössen $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$ ist. Die Determinanten im Schema (21.) besitzen demnach modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ die Werthe*)

$$(22.)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\delta c_0^{2\varkappa}, & \delta c_0^{2\varkappa-1}.c_1, & \delta c_0^{2\varkappa-1}.c_2, & \dots & \delta c_0^{2\varkappa-1}.c_{n-\varkappa}, \\
\delta c_0^{2\varkappa-1} c_{n-\varkappa}, & \delta c_0^{2\varkappa-2} c_{n-\varkappa}.c_1, & \delta c_0^{2\varkappa-2} c_{n-\varkappa}.c_2, & \dots & \delta c_0^{2\varkappa-2}.c_{n-\varkappa}^2, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta c_0.c_{n-\varkappa}^{2\varkappa-1}, & \delta c_{n-\varkappa}^{2\varkappa-1}.c_1, & \delta c_{n-\varkappa}^{2\varkappa-1}.c_2, & \dots & \delta c_{n-\varkappa}^{2\varkappa}.
\end{array}\right.$$

---

*) Hieraus lässt sich unter Anderem schliessen, dass der Quotient

$$|1, \dots 2\varkappa : n-2\varkappa+1, \dots n+\varkappa|$$

in $a_0, b_0, \dots a_n, b_n$, eine vollständige $2\varkappa$te Potenz modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ sei.

Mit Hülfe der Grössen δ, c_0, c_1, ... $c_{n-\varkappa}$ lassen sich jetzt modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ *alle* Grössen $D_{2\varkappa}$ darstellen, und zwar wird sich zeigen:

IV. *Die Determinante*

$$D_{2\varkappa}(i_1+1,\ i_2+1,\ i_3+1,\ \dots\ i_{2\varkappa}+1)$$

hat modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ *den Werth*

$$(23.)\qquad \delta.|c_{i_\alpha-\mu}| \qquad\qquad (\alpha=1,2,\dots 2\varkappa;\ \mu=0,1,\dots 2\varkappa-1),$$

falls jedes c_λ, *dessen Index* λ *entweder negativ oder grösser als* $(n-\varkappa)$ *ist, gleich Null gesetzt wird.*

Wir wollen, um den Beweis zu führen, annehmen, es sei bereits gezeigt, dass

$$(24.)\qquad |1,\ \dots\ \lambda,\ \ \lambda+1+m_1,\ \ \lambda+1+m_2,\ \ \lambda+1+m_3,\ \ \dots|$$

modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ den Werth besitze

$$(25.)\qquad \delta c_0^\lambda|c_{m_\alpha-\mu}| \qquad\qquad (\alpha=1,\dots 2\varkappa-\lambda;\ \mu=0,\dots 2\varkappa-\lambda-1).$$

Da für (24.) $i_1=0, \dots i_\lambda=\lambda-1$ ist, so stimmt dieser Werth mit dem unter (23.) angegebenen überein. Für $\lambda=2\varkappa-1$ ergiebt sich, in Uebereinstimmung mit (23.) wirklich aus (21.), (22.) das Resultat

$$|1,\ 2,\ \dots\ 2\varkappa-1,\ 2\varkappa+m_1| \equiv \delta c_0^{2\varkappa-1}.c_{m_1} \quad (\text{modd. } D^{(1)}_{2\varkappa+2}),$$

so dass wir also nur zu zeigen brauchen, die Formel (25.) gelte auch, wenn λ durch $(\lambda-1)$ ersetzt wird, um den Satz IV. vollständig zu beweisen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir (vgl. Formel (2.)) die Determinante der Ordnung $4\varkappa$, welche nach den obigen Schlüssen congruent Null ist:

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1,\dots\lambda-1,\ \lambda, & \lambda+1+m_1,\dots\lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}, & \cdot\ \cdot\ \dots\ \cdot\ \ \cdot\ \ \dots\ \cdot \\ \cdot,\dots\ \ \cdot, & \lambda+1,\ \lambda+2+m_1,\dots\lambda+2+m_{2\varkappa+1-\lambda}, & 1,\ 2,\dots\lambda,\ \lambda+2,\dots 2\varkappa \end{vmatrix},$$

wobei wir C_3 schon durch Colonnensubtraction vereinfacht haben, soweit dies unmittelbar ersichtlich war, und entwickeln wie früher nach dem *Laplace*schen Determinantensatze. Dabei tritt zunächst das Product auf

$$\pm|1,\ \dots\ \lambda-1,\ \lambda+1+m_1,\ \dots\ \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}|.|1,\ \dots\ 2\varkappa|,$$

und den ersten Factor bildet gerade die Determinante, um welche es sich handelt, sobald man statt m_1+1, m_2+1, ... gesetzt denkt m'_1, m'_2, ... Dieses Product wird somit durch eine Summe von Producten dargestellt, deren beide ersten Glieder die folgenden sind, und bei deren erstem das positive

Vorzeichen gewählt wurde:

$$(26.)\quad \begin{cases} +|1, \ldots \lambda, \; \lambda+1+m_2, \ldots \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}| \\ \qquad\qquad\qquad \times|1, \ldots \lambda, \; \lambda+2, \ldots 2\varkappa, \; \lambda+2+m_1|, \\ -|1, \ldots \lambda, \; \lambda+1+m_1, \; \lambda+1+m_3, \ldots \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}| \\ \qquad\qquad\qquad \times|1, \ldots \lambda, \; \lambda+2, \ldots 2\varkappa, \; \lambda+2+m_2|. \end{cases}$$

Hierin verschwinden noch wegen der zweiten Factoren alle Glieder, bei denen $m_\alpha = 0, 1, \ldots 2\varkappa-\lambda-2$ ist, doch wollen wir sie der Uebersichtlichkeit halber sämmtlich stehen lassen.

Sämmtliche in (26.) auftretenden und alle zu dieser Reihe gehörigen Determinanten besitzen die Form (24.) und können sonach durch die Werthe (25.) ersetzt werden. Dabei nehmen die zweiten Factoren in (26.) die Form an

$$(27.)\qquad \delta c_0^\lambda \begin{vmatrix} c_1, & c_0, & \cdot & \ldots \cdot \\ c_2, & c_1, & c_0, & \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2\varkappa-\lambda-1}, & c_{2\varkappa-\lambda-2}, & c_{2\varkappa-\lambda-3}, & \ldots \; c_0 \\ c_{m_\alpha+1}, & c_{m_\alpha}, & c_{m_\alpha-1}, & \ldots \; c_{m_\alpha-2\varkappa+\lambda+2} \end{vmatrix},$$

und die entsprechenden ersten Factoren werden

$$\delta c_0^\lambda \begin{vmatrix} c_{m_1}, & c_{m_1-1}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m_{\alpha-1}}, & c_{m_{\alpha-1}-1}, & \ldots \\ c_{m_{\alpha+1}}, & c_{m_{\alpha+1}-1}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man nun (27.) nach den Elementen der letzten Zeile, so sind die Coefficienten, welche dabei auftreten, von α unabhängig, treten also in allen einzelnen Gliedern auf. Zieht man für $\alpha = 1, 2, \ldots 2\varkappa+1-\lambda$ die entsprechenden Glieder zusammen, so vereinigen diese sich, abgesehen von jenen gleichen Coefficienten aus (27.), zu Determinanten von der Form

$$\pm\delta^2 c_0^{2\lambda} \begin{vmatrix} c_{m_1+1-\tau}, & c_{m_1}, & c_{m_1-1}, & \ldots \; c_{m_1-2\varkappa+\lambda+1} \\ c_{m_2+1-\tau}, & c_{m_2}, & c_{m_2-1}, & \ldots \; c_{m_2-2\varkappa+\lambda+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m_{2\varkappa-\lambda+1}+1-\tau}, & c_{m_{2\varkappa-\lambda+1}}, & c_{m_{2\varkappa-\lambda+1}-1}, & \ldots \; c_{m_{2\varkappa-\lambda+1}-2\varkappa+\lambda+1} \end{vmatrix} \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hier ist nun unmittelbar ersichtlich, dass nur für $\tau = 0$ die Determinante

nicht verschwindet. Der dazu gehörige aus (27.) stammende Coefficient nebst dem Vorzeichen wird durch

$$(-1)^{\lambda+1}.c_0^{2\varkappa-\lambda-1}$$

bestimmt. Was endlich das Vorzeichen von

$$|1, \dots \lambda-1, \lambda+1+m_1, \dots \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}|.|1, \dots 2\varkappa|$$

angeht, so folgt, wenn bei dem ersten Producte in (26.) das positive Zeichen gewählt wird, dass die Entwickelung der C-Determinante zunächst

$$-|1, \dots \lambda-1, \lambda+1+m_1, \dots \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}|.|1, \dots \lambda, \lambda+2, \dots 2\varkappa, \lambda+1|$$

und also nach der Einordnung der letzten Colonne der zweiten Determinante

$$(-1)^{\lambda+2}\delta c_0^{2\varkappa}.|1, \dots \lambda-1, \lambda+1+m_1, \dots \lambda+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}|$$

ergiebt. Setzt man also endlich für m_a+1 ein m_a, so entsteht

$$|1, \dots \lambda-1, (\lambda-1)+1+m_1, \dots (\lambda-1)+1+m_{2\varkappa+1-\lambda}| \equiv \delta c_0^{\lambda-1}|c_{m_a-\mu}| \quad \binom{a=1, \dots 2\varkappa-\lambda+1}{\mu=0, \dots 2\varkappa-\lambda};$$

und dies war die zu beweisende Formel.

Ins Besondere ist hierdurch auch noch Nachstehendes dargethan:

V. *Die Determinante*

$$D_{2\varkappa}(1, \dots \lambda, \alpha, \dots \beta, 2\varkappa-\tau+1, \dots 2\varkappa)$$

besitzt (modd. $(A_{2\varkappa}, A_{2\varkappa+2}, \dots A_{2n})$) *den Factor*

$$\delta.c_0^{\lambda}.c_{n-\varkappa}^{\tau}.$$

Aus diesem letzten Resultate lässt sich weiter folgern:

VI. *Der in* (22.) *eingeführte Factor* c_0 *ist*, modd. $D_{2\varkappa+2}^{(1)}$ *betrachtet, ein Theiler von* a_0 *und* b_0 *und also von der Form* a_0u+b_0v.

Um dies darzulegen, construiren wir eine Reihe von Matrizen aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+1)$ Colonnen, indem wir aus den $2\varkappa$ ersten Zeilen von D_{2n} die Colonnen mit den Indices

$$1, 2, \dots \varkappa, \varkappa+1+\alpha, \varkappa+2+\alpha, \dots 2\varkappa+1+\alpha \quad (\alpha=0, 1, \dots n-\varkappa-1)$$

herausgreifen. Diesen Matrizen fügen wir je eine, nämlich die $(2\varkappa+1)$te Zeile unten an, deren erste $(\varkappa-1)$ Elemente gleich Null und deren folgende

$$a_0, \quad a_{\alpha+1}, \quad a_{\alpha+2}, \quad \dots \quad a_{\alpha+\varkappa+1}$$

sind. Entwickeln wir nun die entstehenden Determinanten nach den Gliedern der jedesmaligen letzten Zeile, dann wird das erste Glied der Entwickelung

$$(28.)\quad a_0|1, \dots \varkappa-1, \varkappa+1+\alpha, \varkappa+2+\alpha, \dots 2\varkappa+1+\alpha| \quad (\alpha=0, 1, \dots n-\varkappa-1),$$

während die folgenden sämmtlich die Form haben

$$a_\mu |1, \ldots \varkappa, \varkappa+\nu+\alpha, \ldots|.$$

Das gesammte Aggregat ist, da die Determinante zwei einander gleiche Zeilen besitzt, nämlich die letzte und die drittletzte, gleich Null. Die auf das erste Glied (28.) folgenden Summanden sind nach V. modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ durch $\delta c_0^\varkappa$ theilbar; dasselbe muss somit auch bei (28.) selbst stattfinden.

Ist zunächst $\alpha = 0$, so wird der Werth von (28.) gemäss (25.) für $\lambda = \varkappa - 1$, da $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, ... $m_{\varkappa+1} = \varkappa+1$ zu setzen ist, der folgende werden

$$\delta . c_0^{\varkappa-1} \begin{vmatrix} c_1, & c_0, & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_2, & c_1, & c_0, & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\varkappa, & c_{\varkappa-1}, & c_{\varkappa-2}, & \cdots & c_0 \\ c_{\varkappa+1}, & c_\varkappa, & c_{\varkappa-1}, & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

Das Product aus diesem Werthe und aus a_0 muss durch $\delta . c_0^\varkappa$ theilbar werden. Wenn man die Determinante entwickelt, so folgt, dass nur das Glied $c_1^{\varkappa+1}$ keinen Factor c_0 enthält; folglich muss $a_0 . \delta c_0^{\varkappa-1} c_1^{\varkappa+1}$ durch $\delta c^\varkappa$ theilbar sein.

Es sei nun q das Product aller von einander verschiedenen Primtheiler von c_0, die in a_0 entweder gar nicht, oder nur in geringerer Potenz als in c_0 auftreten; dann muss q ein Theiler von c_1 sein.

Jetzt nehmen wir in (28.) für α den Werth 1 an; dann wird gegenüber (24.)

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad \ldots \quad m_{\varkappa+1} = \varkappa+2,$$

und der Werth von (28.) wird gemäss (25.)

$$\delta . c_0^{\varkappa-1} \begin{vmatrix} c_2, & c_1, & c_0, & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_3, & c_2, & c_1, & c_0, & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\varkappa+1}, & c_\varkappa, & c_{\varkappa-1}, & c_{\varkappa-2}, & \cdots & c_1 \\ c_{\varkappa+2}, & c_{\varkappa+1}, & c_\varkappa, & c_{\varkappa-1}, & \cdots & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dies muss mit a_0 multiplicirt durch $\delta . c_0^\varkappa$ theilbar werden, also wird a_0 multiplicirt mit der Determinante durch c_0 und die Determinante selbst durch q theilbar. Unterdrückt man in derselben die Glieder c_0, c_1, die schon durch q theilbar sind, so folgt, dass auch c_2 den Factor q enthält.

Dasselbe folgt nach gleicher Schlussweise weiter für $c_3, \ldots c_{n-\varkappa}$. Da aber der Annahme nach $c_0, c_1, \ldots c_{n-\varkappa}$ keinen gemeinsamen Theiler

besitzen, so ist $q = 1$, und a_0 durch c_0 selbst theilbar. Gleiche Schlüsse gelten für b_0, und damit ist der Satz VI. vollständig bewiesen.

Aus ihm erkennt man mit Hülfe von V. sofort:

VII. *Jedes der Producte*

$$(a_0 u + b_0 v)^{2\varkappa-\lambda} D_{2\varkappa}(1, \ldots \lambda, \alpha, \beta, \ldots)$$

ist modd. $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ *durch*

$$A_{2\varkappa} = D_{2\varkappa}(1, 2, \ldots 2\varkappa) = \delta c_0^{2\varkappa}$$

theilbar.

In II. haben wir gezeigt, dass jedes $D^{(1)}_{2\varkappa}$ in eine hinlänglich hohe Potenz erhoben modd. $A_{2\varkappa+2}, \ldots$ durch $A_{2\varkappa}$ theilbar wird. Denselben Schluss können wir aber auch aus der Formel (23.) resp. aus dem Satze V. ziehen, wobei sogar noch eine Bestimmung des Exponenten der Potenz geliefert wird. Denn dabei ergiebt sich durch fortgesetzte Anwendung von V. für $2\varkappa$, $2\varkappa+2, \ldots$ und $\lambda = 1$ der Satz:

VIII. *Es ist*

$$[D_{2\varkappa}(1, i_2, \ldots i_{2\varkappa})]^{(n-\varkappa+1)(n+\varkappa)} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(A_{2\varkappa}, \ldots A_{2n})),$$

und für $i_1 > 1$ *gilt die Formel*

$$[D_{2\varkappa}(i_1, \ldots i_{2\varkappa}).(a_0 u + b_0 v)]^{(n-\varkappa+1)(n+\varkappa)} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\,(A_{2\varkappa}, \ldots A_{2n})).$$

Der Satz VII. zeigt ferner:

IX. *Es ist das Modulsystem der Elemente*

$$D_{2\varkappa}.(a_0 u + b_0 v)^{n^2-\varkappa^2+2\varkappa}$$

im Modulsysteme

$$A_{2\varkappa}, \quad A_{2\varkappa+2}, \quad \ldots \quad A_{2n}$$

enthalten.

Wir haben bisher die Entwickelung von (2.) nur hinsichtlich des Modulsystems $D^{(1)}_{2\varkappa+2}$ benutzt. Wir können aber von derselben Formel noch einen anderen Gebrauch machen, indem wir das Modulsystem $D^{(1)}_{2\varkappa}$ betrachten. Setzen wir in (2.)

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \quad \ldots \quad i_{2\varkappa} = 2\varkappa; \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 3, \quad \ldots \quad j_{2\varkappa-1} = 2\varkappa-1,$$

so entsteht für jedes $i_{2\varkappa+1}$ gemäss (3.)

$$A_{2\varkappa-2}.|1, 2, \ldots 2\varkappa+1, i_{2\varkappa+1}+1| \equiv 0$$

für das Modulsystem, welches aus dem *Laplace*schen Satze folgt,

$$|1, 2, \ldots 2\varkappa-1, 2\varkappa|, \quad |1, 2, \ldots 2\varkappa-1, 2\varkappa+1|, \quad \ldots \quad |1, 2, \ldots 2\varkappa-1, n+\varkappa|.$$

Der hierin ausgedrückte Satz lässt sich erweitern. Dies geschieht am einfachsten durch Bildung ähnlicher Determinanten und Matrizen, wie die oben gebrauchten. Statt einer C-Determinante zweiter Ordnung bilden wir eine solche der Ordnung ϱ mittels ϱ^2 Matrizen

$$\begin{matrix} C_{11}, & C_{12}, & \dots & C_{1\varrho}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{\varrho 1}, & C_{\varrho 2}, & \dots & C_{\varrho\varrho}. \end{matrix}$$

Es möge C_{11} $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+\varrho-1)$ Colonnen besitzen; diese sind aus den ersten $2\varkappa$ Zeilen von $D_{2\varkappa}$ entnommen; die Indices seien i_1, i_2, ...

Jedes weitere $C_{1\alpha}$ für $\alpha > 1$ bestehe aus $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen, deren Glieder sämmtlich gleich Null sind.

C_{21} möge wieder $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+\varrho-1)$ Colonnen besitzen, deren Indices gegen die von C_{11} um eine Einheit gestiegen, und die also i_1+1, i_2+1, ... sind.

C_{22} besitze $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen, welche mit der 1ten, 2ten, ... $(2\varkappa-1)$ten aus den $2\varkappa$ ersten Zeilen von $D_{2\varkappa}$ übereinstimmen.

$C_{2\alpha}$ besitze für $\alpha > 2$ jedesmal $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen, die aus lauter Nullen gebildet sind.

In C_{31} mit $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa+\varrho-1)$ Colonnen seien die Indices gegen die von C_{21} um eine Einheit gestiegen und also i_1+2, i_2+2, ...

In C_{32} mit $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen seien dieselben gegen die von C_{22} um eine Einheit gestiegen, und also 2, 3, ... $2\varkappa$.

In C_{33} mit $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen seien dieselben 1, 2, ... $2\varkappa$.

In $C_{3\alpha}$ für $\alpha > 3$ mit $2\varkappa$ Zeilen und $(2\varkappa-1)$ Colonnen mögen nur Nullen vorkommen.

In dieser Weise gehen wir weiter. Fügt man dann die Matrizen zu der Determinante $|C_{\varkappa,\lambda}|$ zusammen, und macht einmal die Reductionen, wie sie oben an (2.) auseinandergesetzt wurden, so erhält man

$$A_{2\varkappa-2}^{\varrho-1}.D_{2\varkappa+2\varrho-2}(1, \dots \varrho-1, i_1+\varrho-1, i_2+\varrho-1, \dots i_{2\varkappa+\varrho-1}+\varrho-1);$$

wenn man andererseits nach dem *Laplace*schen Satze die aus $C_{\varrho 1}$, $C_{\varrho 2}$, ... zu bildenden Determinanten $2\varkappa$ter Ordnung entwickelt, erhält man Aggregate von Producten, bei denen ein Factor jedesmal die Form

$$D_{2\varkappa}(1, \dots 2\varkappa-1, i_\alpha)$$

besitzt. Nimmt man also die letzteren zu einem Modulsystem zusammen, so ergiebt sich die folgende Ergänzung des Satzes IX:

X. ***Es ist das Modulsystem der Producte***

$$A^{\varrho}_{2\varkappa-2}.D_{2\varkappa+2\varrho}(1, \dots \varrho, i_{\varrho+1}, \dots i_{2\varkappa+\varrho})$$

in dem Modulsysteme der

$$D_{2\varkappa}(1, \dots 2\varkappa-1, i_a)$$

enthalten und ins Besondere enthält das letztere auch das Modulsystem

$$A_{2\varkappa-2}.A_{2\varkappa+2}, \quad A^{2}_{2\varkappa-2}.A_{2\varkappa+4}, \quad \dots \quad A^{\varrho}_{2\varkappa-2}.A_{2\varkappa+2\varrho}, \quad \dots \quad A^{n-\varkappa}_{2\varkappa-2}.A_{2n}.$$

Im Wesentlichen beruhten unsere Schlüsse auf dem Satze I., welcher die Entwickelung der aus den Matrizen C gebildeten Determinante angiebt. Zu diesem Satze kann nun in vielen anderen Fällen ein Analogon nachgewiesen werden, ja die Formel (6.) ist eigentlich als zweite in einer ganzen Reihe ähnlicher zu betrachten, welche dann entsprechende Resultate liefern. Der einfachste Fall, der in Frage kommt, ist derjenige, bei welchem die Determinanten durch $\varkappa$ Colonnen der ersten $\varkappa$ Zeilen des folgenden Schemas von Elementen gebildet werden:

$$(29.)\quad \begin{cases} w_0, & w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & \dots \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & w_5, & \dots \\ w_2, & w_3, & w_4, & w_5, & w_6, & \dots \\ w_3, & w_4, & w\ , & w_6, & w_7, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

wobei die w_a beliebige Grössen in hinreichend grosser Anzahl sein mögen. Es sind dies für den Fall, dass die Colonnen gleichfalls auf einander folgen, schon vielfach behandelte Gebilde. Herr *Kronecker* hat auch, falls die letzte Colonne von der vorhergehenden getrennt ist, eine Reihe sehr merkwürdiger Sätze in der oben erwähnten Abhandlung zur Kenntniss gebracht. Hier wollen wir uns mit dem angegebenen allgemeinen Falle beschäftigen, ohne auf die naheliegende Erweiterung einzugehen, Zeilen wie Colonnen beliebig zu wählen.

Wir bilden jetzt vier Matrizen C in der folgenden Art: C_1 bestehe aus $\varkappa$ Zeilen und $(\varkappa+1)$ Colonnen; diese sollen den ersten $\varkappa$ Zeilen von (29.) entnommen und durch die Colonnen-Indices $i_1, i_2, \dots i_{\varkappa+1}$ bestimmt sein. Die Matrize C_2 bestehe aus $\varkappa$ Zeilen und $(\varkappa-1)$ Colonnen, deren Elemente sämmtlich gleich Null sind. C_3 bestehe aus $\varkappa$ Zeilen und $(\varkappa+1)$, durch die Indices $i_1+1, i_2+1, \dots i_{\varkappa+1}+1$ charakterisirten Colonnen. C_4 endlich möge

$\varkappa$ Zeilen und $(\varkappa-1)$ Colonnen enthalten, deren Indices $j_1, j_2, \dots j_{\varkappa-1}$ heissen sollen. Bildet man nun hieraus wie oben die C-Determinante und subtrahirt in ihr die 2te, 3te, ... $\varkappa$te Zeile bezw. von der $(\varkappa+1)$ten, $(\varkappa+2)$ten, ... $(2\varkappa-1)$ten, so entsteht

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix} = |i_1, i_2, \dots i_{\varkappa+1}| \cdot |j_1, j_2, \dots j_{\varkappa-1}|,$$

und man erhält daher, wenn man die Colonnen in C_4 von den etwa vorhandenen gleichen in C_3 subtrahirt und nach dem *Laplace*schen Determinantensatze entwickelt, als Analogon von (6.) die Gleichung

$$(30.)\quad \Sigma \pm |i_1, \dots i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots i_{\varkappa+1}| \cdot |j_1, \dots j_{\varkappa-1}, i_\alpha+1| = |i_1, \dots i_{\varkappa+1}| \cdot |j_1, \dots j_{\varkappa-1}|.$$

Hier ist j_1 nicht mehr der früheren Beschränkung unterworfen, gleich 1 sein zu müssen; die Folge hiervon wird sich sofort zeigen.

Setzen wir nun wieder ein Modulsystem $D_{\varkappa+1}$ zusammen aus allen

$$D_{\varkappa+1}(i_1, \dots i_{\varkappa+1}) = |i_1, \dots i_{\varkappa+1}|,$$

dann können wir, um nachzuweisen, dass

$$D_\varkappa^\varpi(1, i_2, \dots i_\varkappa) \equiv 0 \pmod{(D_\varkappa(1, \dots \varkappa), D_{\varkappa+1})}$$

sei, unsere früheren entsprechenden Schlüsse fast buchstäblich wiederholen. Nimmt man ferner für die Reihen der i und der j die folgenden an

$$i_1-1, \quad i_1, \quad i_2, \quad \dots \quad i_\varkappa; \quad j_1 = i_2, \quad j_2 = i_3, \quad \dots \quad j_{\varkappa-1} = i_\varkappa \qquad (i_1 > 1),$$

so zeigt (30.), dass ausser dem Quadrate von $|i_1, \dots i_\varkappa|$ nur noch Producte vorkommen, deren erster Factor die Form $|i_1-1, i_\alpha, i_\beta, \dots|$ besitzt. Ist nun von den letzteren bewiesen, dass sie, in eine hinlänglich hohe Potenz erhoben, modd. $D_{\varkappa+1}$ durch $A_\varkappa = |1, 2, \dots \varkappa|$ theilbar seien, so folgt dasselbe auch von $|i_1, \dots i_\varkappa|$. Setzt man demnach der Reihe nach $i_1 = 2$, $i_1 = 3$, ..., dann folgt:

II^a. *Bedeutet ϖ eine hinlänglich hohe ganze Zahl, so ist*

$$(31.)\quad D_\varkappa^\varpi \equiv 0 \pmod{A_\varkappa, D_{\varkappa+1}}$$

und also auch, wenn ν eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet,

$$(32.)\quad D_\varkappa^\varpi \equiv 0 \pmod{A_\varkappa, A_{\varkappa+1}, \dots A_{\varkappa+\nu-1}, D_{\varkappa+\nu}}.$$

Für die Formel (18.) können wir Entsprechendes nicht auf dem früheren Wege ableiten; denn der Beweis derselben gründete sich darauf, dass in (17.) einer der Summanden wegen des Nullwerdens aller Elemente einer Colonne verschwand. Das tritt aber hier nicht mehr ein. Dagegen erhält man eine neue Reihe von Formeln, wenn man in (30.) die $i_1, \dots i_{\varkappa+1}$ be-

liebig annimmt und

$$j_1 = i_1+1, \quad j_2 = i_2+1, \quad \dots \quad j_{\varkappa-1} = i_{\varkappa-1}+1$$

setzt. Dann entsteht nämlich

$$|i_1, \dots i_{\varkappa-1}, i_\varkappa|.|i_1+1, \dots i_{\varkappa-1}+1, i_{\varkappa+1}+1| - |i_1, \dots i_{\varkappa-1}, i_{\varkappa+1}||i_1+1, \dots i_\varkappa+1| \equiv 0,$$

oder hieraus sofort allgemein

$$(32.) \qquad \frac{|i_1, \dots i_{\varkappa-1}, i_\alpha|}{|i_1, \dots i_{\varkappa-1}, i_\beta|} \equiv \frac{|i_1+1, \dots i_{\varkappa-1}+1, i_\alpha+1|}{|i_1+1, \dots i_{\varkappa-1}+1, i_\beta+1|} \quad (\text{modd. } D_{\varkappa+1}).$$

Ferner erhält man für die Annahme

$$i_1 = \alpha, \quad i_2 = \alpha+1, \quad \dots \quad i_{\varkappa+1} = \alpha+\varkappa; \quad j_1 = \alpha+2, \quad j_2 = \alpha+3, \quad \dots \quad j_{\varkappa-1} = \alpha+\varkappa$$

das Resultat

$$(33.) \qquad |\alpha, \alpha+1, \dots \alpha+\varkappa-1|.|\alpha+2, \dots \alpha+\varkappa+1| \equiv |\alpha+1, \dots \alpha+\varkappa|^2 \quad (\text{modd. } D_{\varkappa+1}),$$

und aus (32.) und (33.) ergiebt sich für das folgende Schema, welches als das Analogon des früheren (21.) auftritt,

$$(34.) \qquad \begin{cases} |1, & \dots & \varkappa-1, & \varkappa+\sigma|, \\ |2, & \dots & \varkappa, & \varkappa+1+\sigma|, \\ |3, & \dots & \varkappa+1, & \varkappa+2+\sigma|, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases} \qquad (\sigma = 0, 1, \dots),$$

dass modd. $D_{\varkappa+1}$ die Glieder einer Zeile in demselben Verhältniss zu einander stehen, wie die entsprechenden Glieder jeder anderen Zeile, und dass die Glieder jeder einzelnen Colonne je eine geometrische Reihe bilden.

Das entsprechende Theorem zu IV. wird:

IV^{a}. *Setzen wir*

$$D_\varkappa(1, \dots \varkappa-1, \varkappa+\alpha) = c_\alpha,$$

so folgt, dass modd. $D_{\varkappa+1}$ *die Congruenz besteht:*

$$c_0^{\varkappa-1}|i_1+1, \dots i_\varkappa+1| \equiv |c_{i_\alpha-\mu}| \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varkappa;\ \mu = 0, 1, \dots \varkappa-1).$$

Den Beweis können wir übergehen, da er durchaus demjenigen parallel läuft, durch welchen der Satz IV. begründet worden ist.

Den eben abgeleiteten Satz können wir zur Feststellung eines Zusatzes für II^{a}. benutzen. Wir wollen nämlich zeigen, dass schon

$$c_{i_\varkappa-\varkappa}^2 = |1, 2, \dots \varkappa-1, i_\varkappa|^2 \equiv 0 \quad (\text{modd. } (A_\varkappa, D_{\varkappa+1}))$$

wird. Dazu nehmen wir an, der Beweis sei bereits für

$$c_1^2, \quad c_2^2, \quad \dots \quad c_{\alpha-1}^2$$

geliefert worden. Nun folgt aus IV^a.:

$$|1,\ 2,\ \ldots\ \varkappa-2,\ \alpha+\varkappa-1,\ \alpha+\varkappa| \equiv \frac{c_\alpha^2}{c_0} - \frac{c_{\alpha-1}c_{\alpha+1}}{c_0} \ (\text{modd. } D_{\varkappa+1});$$

ist also schon $c_{\alpha-1}^1$ durch c_0 theilbar, dann ist der Satz bewiesen, weil ja die linke Seite eine ganze Function der Elemente w ist; ist aber erst $c_{\alpha-1}^2$ durch c_0 theilbar, jedoch schon $c_{\alpha-2}^1$, dann folgt aus

$$|1,\ \ldots\ \varkappa-2,\ \alpha+\varkappa-2,\ \alpha+\varkappa| \equiv \frac{c_\alpha c_{\alpha-1}}{c_0} - \frac{c_{\alpha-2}c_{\alpha+1}}{c_0} \ (\text{modd. } D_{\varkappa+1}),$$

dass $c_\alpha c_{\alpha-1}$ durch c_0, also $c_\alpha^2 c_{\alpha-1}^2$ durch c_0^2 und daher endlich c_α^2 durch c_0 theilbar ist. Wäre weder $c_{\alpha-1}^1$ noch $c_{\alpha-2}^1$ durch c_0 theilbar, jedoch $c_{\alpha-3}^1$, so gehen wir auf

$$|1,\ \ldots\ \varkappa-2,\ \alpha+\varkappa-3,\ \alpha+\varkappa| \equiv \frac{c_{\alpha-2}c_\alpha}{c_0} - \frac{c_{\alpha-3}c_{\alpha+1}}{c_0} \ (\text{modd. } D_{\varkappa+1})$$

zurück und führen den Beweis wie soeben u. s. f. Also folgt:

VIII^a. ***Es ist***

$$D_\varkappa(1,\ 2,\ \ldots\ \varkappa-1,\ \varkappa+\alpha)^2 \equiv 0 \ (\text{modd.} (A_\varkappa,\ D_{\varkappa+1})).$$

Auf weitere Präcisirung des Werthes von ϖ in II^a. wollen wir hier nicht eingehen, da dieselbe grössere Rechnungen zu fordern scheint.

Dagegen lässt sich der Beweisgang des Satzes X. ungeändert beibehalten, und somit gilt auch hier der Satz:

X^a. ***Es ist das Modulsystem, welches aus den Producten***

$$A_{\varkappa-1}^\varrho . D_{\varkappa+\varrho}(i_1,\ i_2,\ \ldots\ i_{\varkappa+\varrho})$$

besteht, in dem Modulsysteme der Elemente

$$D_\varkappa(1,\ 2,\ \ldots\ \varkappa-1,\ \varkappa+\alpha)$$

enthalten, und ins Besondere enthält das letztere auch das Modulsystem

$$A_{\varkappa-1}.A_{\varkappa+1},\quad A_{\varkappa-1}^2.A_{\varkappa+2},\quad \ldots\quad A_{\varkappa-1}^\varrho.A_{\varkappa+\varrho},\quad \ldots.$$

Besteht zwischen den Grössen $w_\varkappa$ eine lineare Recursionsformel $m$ter Ordnung, so kommen wir auf den von Herrn *Kronecker* ausführlich behandelten, für die Theorie der Elimination wichtigen Fall.

Giessen, den 30. Juni 1888.

Zur Krümmungstheorie der Flächen.

(Von Herrn *R. von Lilienthal* in Bonn.)

Im 103. Bande dieses Journals S. 34 hat Herr *Knoblauch* die Gleichung der von ihrem Schmiegungskreis vierpunktig berührten Normalschnitte einer Fläche für den Fall aufgestellt, dass die Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte durch Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen gegeben sind, während sie zuerst von *de la Gournerie* (*Liouville*s Journal, T. 20, p. 145) für den Fall ermittelt ist, dass z als Function von x und y betrachtet wird. Der fraglichen Gleichung lässt sich, wenn man die Kugel und abwickelbare Flächen ausschliesst, eine Form geben, welche es auf die einfachste Weise gestattet, einige Sätze in Betreff jener Normalschnitte aufzustellen, die nicht ohne Interesse zu sein scheinen. Dabei soll von den Bezeichnungen Gebrauch gemacht werden, die im 30. und 31. Band der Mathem. Annalen, S. 1 bez. 85 u. ff. benutzt sind.

Um zu der in Rede stehenden Gleichung zu gelangen, ist das Differential des Krümmungsradius ϱ eines Normalschnitts unter der Voraussetzung gleich Null zu setzen, dass man in dem Normalschnitt fortschreitet.

Benutzt man für ϱ die Gleichung:

$$\varrho = \frac{\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2}{\varrho_1 H_1^2 + \varrho_2 H_2^2}$$

und drückt jene Voraussetzung durch die Beziehung (Annalen Bd. 31, S. 90)

$$\varrho_2 H_2 d\varrho_1 H_1 - \varrho_1 H_1 d\varrho_2 H_2 + (\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2) T = 0$$

aus, welche besagt, dass die geodätische Krümmung des Schnitts verschwindet, so zeigt sich, dass sowohl in der letzten Gleichung wie in der Gleichung $d\varrho = 0$ die Grösse $H_2 dH_1 - H_1 dH_2$ nur linear vorkommt. Die Elimination dieser Grösse ergiebt dann:

$$(1.)\qquad H_1^2 d\varrho_1 + H_2^2 d\varrho_2 - 2(\varrho_1 - \varrho_2) H_1 H_2 T = 0$$

als Gleichung der fraglichen Normalschnitte. Der linke Theil dieser Gleichung soll nun als kubische Form von H_1 und H_2 dargestellt werden.

Die Ausdrücke für H_1 und H_2 (Annalen Bd. 31, S. 86) liefern:

$$dp = \frac{H_1\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-H_2\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)}{-Q_0}, \quad dq = \frac{-H_1\sqrt{L}\sin\sigma+H_2\sqrt{L}\cos\sigma}{-Q_0}.$$

Führt man diese Werthe von dp und dq in $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$ ein, so entsteht bei Benutzung der Abkürzungen:

$$P_1 = (\varrho_1-\varrho_2)\Big(\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma\Big),$$

$$P_2 = (\varrho_1-\varrho_2)\Big(\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)-\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma\Big),$$

$$Q_1 = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}\Big(\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\Big),$$

$$Q_2 = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}\Big(\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma - \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\Big),$$

das Gleichungssystem:

$$(2.)\quad \begin{cases} d\varrho_1 = \dfrac{\dfrac{P_1}{\varrho_1-\varrho_2}H_1+(\varrho_1-\varrho_2)Q_2H_2}{-Q_0}, \\[2ex] d\varrho_2 = \dfrac{(\varrho_1-\varrho_2)Q_1H_1+\dfrac{P_2}{\varrho_1-\varrho_2}H_2}{Q_0}. \end{cases}$$

Hier sind P_1 und P_2 proportional den Flächenelementen der zu ϱ_1 resp. ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunktsflächen (Annalen Bd. 30, S. 2 und 7). Q_1 und Q_2 sind proportional den Flächenelementen der Einheitskugel, falls ihre Punkte durch Radien bestimmt werden, die den Normalen der ersten resp. zweiten Krümmungsmittelpunktsfläche parallel sind, denn es ist z. B. (a. a. O. S. 3):

$$\sqrt{L_1N_1-M_1^2} = T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi),$$

aber aus der Gleichheit der beiden für Q_2' geltenden Ausdrücke (a. a O. S. 8) folgt:

$$T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) = Q_1.$$

Da nun (Annalen, Bd. 31, S. 89):

$$T = \frac{Q_2H_1-Q_1H_2}{Q_0},$$

so nimmt (1.) mit Hülfe von (2.) die Form an:

$$(3.)\quad P_1H_1^3+3(\varrho_1-\varrho_2)^2Q_2H_1^2H_2-3(\varrho_1-\varrho_2)^2Q_1H_1H_2^2-P_2H_2^3 = 0.$$

Bildet irgend eine Tangente mit der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie den Winkel ψ, ihre conjugirte Tangente den Winkel χ, so ist:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho_2 H_2}{\varrho_1 H_1}, \quad \operatorname{tg}\chi = -\frac{H_1}{H_2}.$$

Somit lehrt die Gleichung (3.) unmittelbar folgenden Satz: Die der Tangente eines von seinem Schmiegungskreis vierpunktig berührten Normalschnitts einer Fläche conjugirte Tangente besitzt auf allen der Fläche parallelen Flächen constante Richtung.

Die Beziehung (3.) gestaltet sich besonders einfach, wenn ϱ_2 nur eine Function von ϱ_1 ist. Man erhält nämlich bei $\varrho_2 = f(\varrho_1)$ aus (2.):

$$(4.) \quad Q_1 = \frac{-P_1 f'(\varrho_1)}{(\varrho_1-\varrho_2)^2}, \quad Q_2 = -\frac{P_2}{(\varrho_1-\varrho_2)^2 f'(\varrho_1)},$$

und somit geht (3.) in:

$$(5.) \quad \frac{Q_1}{f'(\varrho_1)} H_1^3 - 3Q_2 H_1^2 H_2 + 3Q_1 H_1 H_2^2 - f'(\varrho_1) Q_2 H_2^3 = 0$$

über. Ist hier $Q_1 = 0$, in welchem Falle die erste Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Curve ausartet, so wird die zu ϱ_2 gehörende Krümmungslinie von ihrem Schmiegungskreis vierpunktig berührt. Die beiden anderen Normalschnitte mit derselben Berührungseigenschaft sind nur dann reell, wenn $f'(\varrho_1)$ negativ ist. Hier folgt:

$$\frac{H_1}{H_2} = \pm \frac{\sqrt{-f'(\varrho_1)}}{\sqrt{3}}.$$

Analog ergiebt sich bei verschwindendem Q_2, dass die zu ϱ_1 gehörende Krümmungslinie von ihrem Schmiegungskreis vierpunktig berührt wird, und dass die beiden anderen Normalschnitte mit der fraglichen Eigenschaft bei negativem $f'(\varrho_1)$ durch die Gleichung:

$$\frac{H_1}{H_2} = \pm\sqrt{3}\sqrt{-f'(\varrho_1)}$$

bestimmt werden.

Im allgemeinen Fall, wenn weder Q_1 noch Q_2 Null ist, zeigt sich ebenfalls, dass nur dann alle drei in Rede stehenden Normalschnitte reell ausfallen, wenn $f'(\varrho_1)$ negativ ist. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich folgende Lösung. Bestimmt man einen Winkel ω durch die Gleichung:

$$\operatorname{cotg}\omega = -\frac{Q_2}{Q_1}\sqrt{-f'(\varrho_1)},$$

oder da $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\varrho_1 R_1}{\varrho_2 R_2}$ ist, wo R_1 und R_2 die geodätischen Krümmungsradien der zu ϱ_2 resp. ϱ_1 gehörenden Krümmungslinien bedeuten (Annalen, Bd. 31, S. 87), durch die Gleichung:

$$\operatorname{cotg}\omega = -\frac{\varrho_1 R_1}{\varrho_2 R_2}\sqrt{-f'(\varrho_1)},$$

so wird:

$$\frac{H}{H_2} = 1 - f'(\rho_1) \operatorname{cotg} \frac{\omega - 2\lambda\pi}{3} \qquad (\lambda = 0, 1, 2),$$

folglich, wenn man mit φ_0, φ_1, φ_2 die Winkel bezeichnet, welche die Tangenten unserer Normalschnitte mit der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie bilden:

$$\operatorname{tg}\varphi_\lambda = \frac{\varrho_2}{\varrho_1(1 - f'(\varrho_1))} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega + 2\lambda\pi}{3}\right),$$

welches Resultat nach dem Obigen auch für unendliche Werthe von R_1 und R_2 statthat.

Für die Minimalflächen im Besonderen ergiebt sich:

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{R_1}{R_2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_\lambda = -\operatorname{tg}\frac{\omega + 2\lambda\pi}{3},$$

sodass hier die fraglichen Normalschnitte sich unter dem constanten Winkel 120° schneiden. Diese letztere Eigenschaft besitzen unter allen Flächen, bei denen ϱ_2 durch ϱ_1 allein ausdrückbar ist, nur solche, für welche die Gleichung:

$$\varrho_2 = \frac{-\varrho_1}{1 - c\varrho_1}$$

besteht, wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Sind xyz und $x_1y_1z_1$ die Coordinaten zweier verwandten Minimalflächen, welche der Beziehung:

$$(dx + idx_1)^2 + (dy + idy_1)^2 + (dz + idz_1)^2 = 0$$

entsprechen, und bezeichnet man die auf die Fläche (x_1, y_1, z_1) bezogenen Grössen σ, ω, R_1, R_2 der Reihe nach mit σ_1, ω_1, R_{11}, R_{21}, so geht die gegenseitige Lage der von ihrem Schmiegungskreis vierpunktig berührten Normalschnitte in entsprechenden Punkten beider Flächen aus den Gleichungen hervor:

$$\frac{R_{21}}{R_{11}} = \varepsilon\gamma_1 \frac{\varepsilon R_1 - R_2}{\varepsilon R_1 + R_2},$$

$$\operatorname{tg}(\omega_1 + \gamma_1\omega) = \varepsilon\gamma_1,$$

$$\operatorname{tg}(\omega_1 + \sigma_1) = \frac{\gamma_1}{\operatorname{tg}\omega}, \quad \operatorname{tg}(\omega_1 - \sigma_1) = -\gamma_1 \operatorname{tg}\omega,$$

wo ε und γ_1 absolut genommen die Einheit bedeuten. (Vergl. Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Bonn 1886. S. 95.)

Bonn, im Juli 1888.

Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques *).

(Par M. *Angelo Genocchi.*)

(Né à Plaisance le 5 mars 1817, mort à Turin le 7 mars 1889.)

Si, dans l'équation (65.):

$$\frac{\alpha^{nh}-\alpha^{-nh}}{\alpha^h-\alpha^{-h}} = \prod_{k=1}^{k=q}(\alpha^h\beta^k-\alpha^{-h}\beta^{-k})(\alpha^h\beta^{-k}-\alpha^{-h}\beta^k) \text{ **)} \qquad (h=1,2,3,\ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ q=\tfrac{1}{2}(n-1)),$$

on fait:

$$\alpha = e^{\frac{2a\pi}{m}\sqrt{-1}}, \quad \beta = e^{\frac{2b\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

en désignant par a un nombre premier à m, et par b un nombre premier à n, il viendra:

$$(73.)\quad \frac{\sin\frac{2anh\pi}{m}}{\sin\frac{2ah\pi}{m}} = 2^{2q}(-1)^q\prod_{k=1}^{k=q}\sin\frac{2\pi(anh+bmk)}{mn}\sin\frac{2\pi(anh-bmk)}{mn} \qquad (q=\tfrac{1}{2}(n-1)).$$

Or, en général, $\sin 2\pi x$ est positif, si x surpasse un nombre entier d'une quantité inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$, négatif si, au contraire, il y a un nombre entier qui surpasse x d'une quantité inférieure à $\frac{1}{2}$. Au moyen de cette remarque, on déduira de la formule (73.) le théorème d'arithmétique suivant:

Soient m, n, a, b des nombres entiers positifs, m et n impairs et premiers entre eux, a premier à m, b premier à n; soit h un nombre déterminé quelconque, et k un nombre indéterminé, qui prenne successivement les valeurs 1, 2, 3, ... $\frac{1}{2}(n-1)$. Divisez par mn toutes les valeurs que

*) La „Note sur la théorie des résidus quadratiques" a été publiée en 1853 par l'Académie Royale de Belgique dans le T. XXV des Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers.

**) La lettre α désigne une racine primitive de l'équation $x^m = 1$, la lettre β une racine primitive de l'équation $x^n = 1$.

prendront les quantités:

$$anh+bmk, \quad anh-bmk,$$

en déterminant les quotients de manière que chaque reste soit ***numériquement*** inférieur à $\frac{1}{2}mn$, et soit λ le nombre total des restes ***négatifs***. Divisez aussi ah et anh par m, en prenant les restes numériquement inférieurs à $\frac{1}{2}m$; enfin soit:

$$q = \tfrac{1}{2}(n-1).$$

Cela posé, le nombre $q+\lambda$ sera pair, si les restes de ah et anh sont de même signe, impair s'ils sont de signes contraires.

Ce théorème pouvant conduire à la loi de réciprocité, nous allons en chercher une démonstration directe, en supposant, pour plus de simplicité:

$$a = 1, \quad b = 1$$

et h l'un des termes de la suite 1, 2, 3, ... p, p étant $= \frac{1}{2}(m-1)$.

Faisons:

$$r = \tfrac{1}{2}(mn-1), \quad u = nh-mk, \quad v = nh+mk-r;$$

u et v, abstraction faite du signe, seront $< \frac{1}{2}mn$. Ayant divisé nh par m, soit i le quotient, h' le reste positif: nous aurons:

$$nh = mi+h', \quad h < \tfrac{1}{2}m,$$

et par suite:

$$mi < nh < \tfrac{1}{2}mn, \quad \text{d'où} \quad i < \tfrac{1}{2}n;$$

donc mk sera plus petit que nh pour toutes les valeurs $k = 1, 2, 3, \ldots i$, mais pour ces seules valeurs, de sorte que u aura i valeurs positives. J'observe que les nombres h' et u ne peuvent être nuls, car nh, étant inférieur à $\frac{1}{2}mn$, ne peut être multiple en même temps de m et de n. Mais nous aurons aussi:

$$nh+mk = m(i+k)+h', \quad r = mq+p,$$

et, par conséquent:

$$nh+mk > r$$

pour toutes les valeurs:

$$k = q-i+1, \quad q-i+2, \quad q-i+3, \quad \ldots \quad q-1, \quad q,$$

et aussi pour l'autre valeur $k = q-i$, dans le cas de $h' > p$: en effet $q-i$ ne pourra pas être nul dans ce cas, puisque si $q = i$, il s'ensuivrait $mi+h' > mq+p$, ou $nh > r$, tandis que r est égal à $np+q$, et que h ne surpasse pas p. Ainsi le nombre v aura i valeurs positives si $h' < \frac{1}{2}m$, et

en aura $i+1$ si $h' > \frac{1}{2}m$. Donc le nombre des valeurs positives de v égale celui des valeurs positives de u, lorsque le reste h' est inférieur à $\frac{1}{2}m$, et le surpasse d'une unité dans le cas contraire: de là résulte le théorème cidessus énoncé.

Maintenant soit f le nombre total des valeurs positives de u, et g le nombre total des valeurs positives de v, en supposant qu'on attribue successivement à h toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots p$, à k toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots q$; soit n_1 le nombre des restes supérieurs à $\frac{1}{2}m$ provenant de la division des multiples nh par m: on aura évidemment $g-f = n_1$. Par les mêmes raisons, si f' désigne le nombre total des valeurs positives de la quantité $u' = mk-nh$, et m_1 le nombre des restes supérieurs à $\frac{1}{2}n$ provenant de la division des multiples mk par n, on aura $g-f' = m_1$. Il en résulte:

$$2g-f-f' = m_1+n_1,$$

et par suite:

$$(-1)^{f+f'} = (-1)^{m_1+n_1}.$$

Mais les valeurs positives de u' sont les négatives de u, car $u' = -u$, et par conséquent $f+f'$ est le nombre total des valeurs de u, c'est-à-dire pq; donc:

$$(-1)^{m_1+n_1} = (-1)^{pq}.$$

Enfin, si m et n sont deux nombres premiers, on aura, d'après un lemme de M. *Gauss:*

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{m_1}, \quad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{n_1},$$

d'où l'on conclut la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{pq}.$$

J'ignore si cette démonstration élémentaire et très simple, et sa liaison avec celle de M. *Liouville,* ont déjà été signalées.

Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

(Aus einem Aufsatze in No. XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.)

(Von *L. Kronecker.*)

Bei „logarithmischer Umgestaltung" der Deduction, welche ich im 96sten Bande dieses Journals (S. 348) gegeben habe, gelangt man in fast ebenso einfacher Weise zu der Reciprocitätsgleichung:

$$(A.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$

Hierin bedeuten m und n ungrade Zahlen, und die Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ werden, wenn, wie in meinen früheren Aufsätzen, mit $\text{sgn.}\,a$ die mit dem Vorzeichen von a genommene Einheit und mit $R(a)$ der kleinste Rest von a bezeichnet wird, durch die Gleichungen definirt:

$$(B.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right) = \text{sgn.}\prod_k R\left(\frac{km}{n}\right),\quad \left(\frac{n}{m}\right) = \text{sgn.}\prod_h R\left(\frac{hn}{m}\right)\quad \binom{h=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(m-1)}{k=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Für jede der Zahlen $h = 1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(m-1)$ ist:

$$(C.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\text{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right],\quad \tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\text{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m}\right].$$
$$(k=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(n-1))$$

Denn in der ersten Gleichung giebt der Ausdruck auf jeder der beiden Seiten die Anzahl der Zahlen $\frac{1}{2}(n+1)-k$ an, welche kleiner als $\frac{hn}{m}+\frac{1}{2}$ sind, während durch die Ausdrücke auf beiden Seiten der zweiten Gleichung die Anzahl derjenigen Zahlen k dargestellt wird, die kleiner als $\frac{hn}{m}$ sind. Ferner ist offenbar:

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]-\left[\frac{hn}{m}\right] = \tfrac{1}{2}\left(1-\text{sgn.}\,R\left(\frac{hn}{m}\right)\right) \equiv \frac{1}{\pi i}\log\text{sgn.}\,R\left(\frac{hn}{m}\right)\quad (\text{mod. } 2);$$

die Gleichungen ($C.$) führen daher zu der Congruenz:

$$(D.)\quad \tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\operatorname{sgn.}R\left(\frac{hn}{m}\right)\pmod{2},$$
$$(k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

und aus dieser resultirt mit Hülfe der Gleichungen ($B.$) die folgende:

$$(E.)\quad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\pmod{2},$$
$$(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

deren unmittelbare Folge die Congruenz:

$$(F.)\quad \frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)\pm\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv(m-1)(n-1)\pmod{2},$$

und also auch die Reciprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

ist. Denn wenn man in der Congruenz ($E.$) m mit n und h mit k vertauscht, so kommt:

$$(E'.)\quad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)\pmod{2},$$

und die Verbindung der Congruenzen ($E.$) und ($E'.$) ergiebt, dass:

$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\pmod{2},$$
$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pmod{2}$$
$$(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

ist. Es bedarf daher nur noch der Bemerkung, dass jedes einzelne von den $\frac{1}{4}(m-1)(n-1)$ Gliedern der Summen auf der rechten Seite *modulo* 2 congruent 1 ist, um die Richtigkeit der Congruenz ($F.$) zu begründen.

In einem auf S. 109—111 des 12. Bandes der *Acta Mathematica* abgedruckten Aufsatze des Herrn *Jacob Hacks* ist die oben in den Gleichungen ($C.$) dargelegte, schon von *Genocchi* erkannte Bedeutung der Zahlen:*)

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]\quad\text{und}\quad\left[\frac{hn}{m}\right]$$

nicht bemerkt. Diese Bedeutung setzt aber die Relationen, deren Nachweis jener Aufsatz gewidmet ist, und welche in den hier gebrauchten Zeichen

*) Vgl. auch den Schluss von art. VII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.

folgendermassen lauten:

$$\sum_h \left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right] = \sum_k \left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right], \quad \sum_h \left[\frac{hn}{m}\right] + \sum_k \left[\frac{km}{n}\right] = \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)$$
$$(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

unmittelbar in Evidenz und macht daher die ganze dortige Beweisführung entbehrlich.

In dem oben formulirten Reciprocitätsgesetzbeweise hat man — wie im art. VII meiner im Titel angeführten Arbeit: „Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen" näher ausgeführt ist — nur eine logarithmische Umgestaltung des dritten *Gauss*schen Beweises zu sehen. Dasselbe gilt von dem fünften *Gauss*schen, von dem *Genocchi*schen *) und dem damit übereinkommenden *Schering*schen Beweise, an welchen der oben erwähnte Aufsatz des Herrn *Hacks* anknüpft.

Der Ausgangspunkt der *Genocchi*schen Entwickelung lässt sich mittels der hier gebrauchten Bezeichnungen durch die Gleichung:

$$(G.)\quad \tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn.}R\left(\frac{nh}{m}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\right)$$
$$(h = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

darstellen, während die Ausführungen des Herrn *Schering* darauf basiren, dass für $x \geqq 0$:

$$(H.)\quad \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{sgn.}R(x)) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'}(1+\operatorname{sgn.}(x+\tfrac{1}{2}-k'))-\tfrac{1}{2}\sum_k(1+\operatorname{sgn.}(x-k))$$
$$(k, k' = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.})$$

ist. Diese letztere Gleichung ist freilich allgemeiner als die erstere (*G.*), sie findet aber in der *Schering*schen Deduction **) nur für $x = \frac{nh}{m}$ Anwendung, und hierfür stimmt sie mit der *Genocchi*schen Gleichung genau überein. Um dies zu erkennen, braucht man nur die Summationen in der Gleichung (*H.*) auf die positiven Zahlen k, k', die kleiner als $\tfrac{1}{2}n$ sind, zu beschränken und den Summationsbuchstaben k' durch $\tfrac{1}{2}(n+1)-k$ zu ersetzen.

Ich bin auf den Beweis, welchen *Genocchi* im art. XIII seiner im Jahre 1852 der Akademie zu Brüssel eingesandten und bald darauf dort preisgekrönten und publicirten Arbeit gegeben hat, erst im Anfange des Jahres 1881 durch eine von ihm selbst erhaltene briefliche Mittheilung auf-

---

*) Vgl. art. VIII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte von 1885.

**) Vgl. die mit [1] bezeichnete Gleichung auf S. 220 der Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1879.

merksam geworden *). Indessen hatte *Genocchi* schon in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 16. Februar 1880 eine Notiz darüber veröffentlicht. Bis dahin scheint aber sein Beweis einem grossen Theile des mathematischen Publikums unbekannt geblieben zu sein; wenigstens haben wir beide, Hr. *Schering* und ich, ihn in den verbreitetsten Werken und Zeitschriften nirgends erwähnt gefunden. Um ihn nunmehr in der ursprünglichen Darstellung allgemeiner zugänglich zu machen, habe ich auf den vorhergehenden Seiten den ersten Theil des art. XIII der erwähnten *Genocchi*schen Preisschrift abdrucken lassen.

*) In demselben Briefe lenkte *Genocchi* meine Aufmerksamkeit auf einen von *Schaar* in den Schriften der Brüsseler Akademie veröffentlichten Beweis, der mir ebenfalls entgangen ist, mit folgenden Worten:

„Mais entre toutes les démonstrations de la loi de réciprocité, celle que vous avez publiée en 1876 (Monatsberichte p. 331) est surtout remarquable parce qu'elle se renferme dans le champ des résidus quadratiques, comme la première de *Gauss* et n'emprunte rien à la théorie des résidus des puissances supérieures. Toutefois les produits que vous considérez sont à-peu-près les mêmes que M. *Schaar* avait introduits dès 1847 dans la démonstration de la loi de réciprocité (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1 Série, Tome XIV, Partie I, p. 79—83) sans pouvoir la rendre indépendante de l'art. 106 des ***Disquisitiones***.“

Paul du Bois-Reymond.

(Geboren in Berlin am 2. December 1831. promovirt an der Berliner Universität am 26. März 1859, Privatdocent in Heidelberg 1865 bis 1868. ausserordentlicher Professor daselbst 1868 bis 1870. ordentlicher Professor in Freiburg in Baden vom 28. Februar 1870 bis zum 15. März 1874, von da ab bis zum Herbst 1884 an der Universität zu Tübingen und seitdem an der Technischen Hochschule in Charlottenburg).

Nur wenige Tage. nachdem der Druck der Abhandlung „Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (S. 241 bis 301 dieses Bandes) vollendet war. hat den Verfasser der Tod ereilt. Er starb. auf der Durchreise nach Neuchâtel. in Freiburg in Baden am 7. April. Dass er in den letzten Monaten. wo die Krankheit. welcher er erlag. wohl schon weit vorgeschritten war. noch die geistige Spannkraft zur Veröffentlichung der umfangreichen Arbeit sich bewahrt hat. ist bewundernswerth. Es zeigte sich noch bei seiner letzten Publication. dass ihm die mathematischen Fragen stets Lebensfragen gewesen sind.

Er knüpft in dieser Abhandlung. wie er gleich im Anfange bemerkt, an die um ein Vierteljahrhundert zurückliegenden Untersuchungen an, welche er im Jahre 1864 unter dem Titel „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln (erstes Heft: die Theorie der Charakteristiken)“ als besonderes Werk herausgegeben hat. Schon kurze Zeit nach der Veröffentlichung dieses Werkes scheint *P. du Bois-Reymond* sich der andern Kategorie von Untersuchungen zugewandt zu haben, welcher der grösste Theil seiner nun folgenden Publicationen gewidmet ist. Denn die erste dieser Abhandlungen. zugleich eine seiner bedeutendsten, ist vom Februar 1868 datirt: sie ist im 69sten Bande dieses Journals abgedruckt und hat den Titel „Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen. zu welcher das *Fourier*sche Doppelintegral gehört“. Während er hierin zeigt, dass es ihm gelungen ist, den Kreis der seit *Fourier* und *Dirichlet* bekannten Darstellungsformeln wesentlich zu erweitern, bringt eine zweite. aus jener Reihe hervorzuhebende

Abhandlung *) als Erfolg seiner darauf gerichteten Bestrebungen den Nachweis, dass die Anwendbarkeit solcher Darstellungsformeln nicht unbeschränkt ist. *P. du Bois-Reymond* selbst bezeichnet auf S. IX der Einleitung zu dieser Abhandlung die dabei „gewonnene Einsicht" nur als „vor der Hand wohl befriedigend", und es wird hierdurch erklärlich, dass ihn die „dunkeln Fragen", zu deren Aufhellung er eben beigetragen hatte, und die ihrer Natur nach wohl nicht eigentlich abgeschlossen werden können, noch lange beschäftigten, ja mit unwiderstehlicher Gewalt fesselten. Dass er aber gern davon loskommen wollte und sich darnach sehnte, wieder in seine früheren Forschungsbahnen einzulenken, bezeugen seine Aeusserungen in einem an mich nach Florenz gerichteten Briefe vom 22. April 1886. Er schickte mir damit einen Separatabdruck seiner in den Sitzungsberichten der hiesigen Akademie (1886, XVIII) veröffentlichten Notiz „Ueber die Integration der Reihen" und schrieb mit Bezug darauf: „Ihr Kriterium für $\lim_{\varepsilon=0} \int \varphi(x, \varepsilon)\, dx = 0$ habe ich nur angeführt, ohne es näher zu discutiren, wozu Zeit und Raum fehlte, werde dies aber in der ausführlicheren Mittheilung nachholen. Dann werde ich dieser Art Mathematik übrigens den Rücken kehren. Es stehen die Ergebnisse in zu ungünstigem Verhältnisse zur Anstrengung, und ausserdem regen sie nicht zu weiterem Forschen an; im Gegentheil, ihre Hauptwirkung ist, der Forschung in einer gewissen Richtung Einhalt zu thun, und das heisst, sehr brav gegen seinen Nächsten, aber zu uneigennützig gegen sich selbst handeln. . . . Ich schreibe jetzt an meinem letzten Aufsatz in dieser Materie, den ich Sie ersuchen werde im Jubelbande unterzubringen. Es handelt sich darin um den Stetigkeitsgrad und den Convergenzgrad in genauerer Durchführung und damit Zusammenhängendes, und dann geht es wieder mit Hurrah! an die partiellen Differentialgleichungen."

Es ist darum als eine glückliche Fügung zu betrachten, dass die schon seit einiger Zeit von *P. du Bois-Reymond* gehegte Absicht, seine zum Theil aus älterer Zeit stammenden Aufzeichnungen über lineare partielle Differentialgleichungen zu einem druckfertigen Manuscript zu gestalten, im vorigen Jahre zur Ausführung gekommen, und dass es ihm noch vergönnt gewesen ist, die Reihe werthvoller Beiträge, welche er diesem Journal zu-

*) „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der *Fourier*schen Darstellungsformeln." Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wissenschaften II. Cl. XII. Bd. II. Abth. München 1876.

gewandt hat, mit einer wenigstens übersichtlichen Darstellung dessen, was das zweite Heft seiner „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen" enthalten sollte, und damit auch in gewisser Weise dieses Werk selbst abzuschliessen.

In einem von Tübingen am 3. November 1881 an mich gerichteten Briefe *P. du Bois-Reymonds* findet sich folgende Stelle: „Nun ist *Heine* doch seiner hoffnungslosen Erkrankung erlegen. Ich bedauere ungemein, ihn nicht mehr unter den Lebenden zu wissen, und bewahre treu das Bild des freundlichen, wohlwollenden, bedeutenden Mannes. Er war einer von denen, für die man publicirt; denn es sind doch nur Wenige, an die man als an Leser von Urtheil und Nachsicht beim Niederschreiben seiner Geistesproducte denkt. Ein Glück ist es, dass sein Geschick ihm Zeit liess, die zweite Auflage seines Buches zu vollenden". Diese Worte sind ein schönes Zeugniss für die edle Gesinnung und die warme Empfindung des nunmehr auch Dahingeschiedenen beim Tode eines Fachgenossen; sie drücken auch am besten aus, was jetzt bei seinem Tode die überlebenden Fachgenossen bewegt.

Berlin, den 18. April 1889. *L. Kronecker.*

STORAGE AREA

